א. נסמן ב- x את מחיר ק"ג קמח (שקלים) לפני ההנחה,

ובהתאם $x+50$ יהיה מחיר ק"ג גבינה צהובה, לפני ההנחה.

נרשום את הנתונים בטבלה מתאימה, כאשר סך כל התשלומים שווה למחיר כפול כמות .

בעל הפיצרייה קיבל הנחה של 20% על כל ק"ג גבינה צהובה ולכן שילם $\frac{100-20}{100}\cdot(x+50)=0.8(x+50)$.

בעל הפיצרייה קיבל הנחה של 25% על כל ק"ג קמח ולכן שילם $\frac{100-25}{100}\cdot x=0.75x$.

	כמות (ק"ג)	מחיר לק"ג לאחר ההנחה (₪)	סך הכול (₪)
גבינה צהובה	5	$0.8(x+50)$	$5\cdot0.8(x+50)=4(x+50)$
קמח	10	$0.75x$	$10\cdot0.75x=7.5x$

בסך הכול שילם בעל הפיצרייה 315 שקלים בעבור הקנייה,

והמשוואה המתאימה: $4(x+50)+7.5x=315$.

$$4x+200+7.5x=315$$
$$11.5x=115 \quad /:11.5$$
$$\boxed{x=10} \quad \rightarrow \boxed{x+50=60}$$

תשובה: לפני ההנחה היה מחיר 1 ק"ג גבינה צהובה 60 שקלים ומחיר 1 ק"ג קמח 10 שקלים.

ב. לרשות בעל הפיצרייה 5 ק"ג גבינה צהובה, כלומר $5{,}000$ גרם $=5\cdot1000$.

לכל פיצה נדרשים 250 גרם גבינה צהובה, כלומר ניתן להכין 20 פיצות $=5{,}000:250$.

לרשות בעל הפיצרייה 10 ק"ג קמח, כלומר $10{,}000$ גרם $=10\cdot1000$.

לכל פיצה נדרשים 500 גרם קמח, כלומר ניתן להכין 20 פיצות $=10{,}000:500$.

ניתן לראות שכל הרכיבים שקנה בעל הפיצרייה מנוצלים בעת הכנת 20 פיצות,

בדיוק כמו שבעל הפיצרייה מעוניין.

תשובה: על בעל הפיצרייה לייצר 20 פיצות.

א. (1) משוואת הצלע AB **היא** $y = mx + 4$ **.**

נקודת החיתוך עם ציר ה- y **, בה מתקיים** $x = 0$ **, היא** $A(0\,,4)$ **.**

תשובה: $A(0\,,4)$ **.**

(2) השיפוע בין $B(3\,,-5)$ **ל-** $A(0\,,4)$ **שווה ל-** m **(כי** $y = mx + 4$ **היא משוואת הצלע** AB **)**

$$m = \frac{-5-4}{3-0} = \frac{-9}{3} = -3$$

תשובה: $m = -3$ **.**

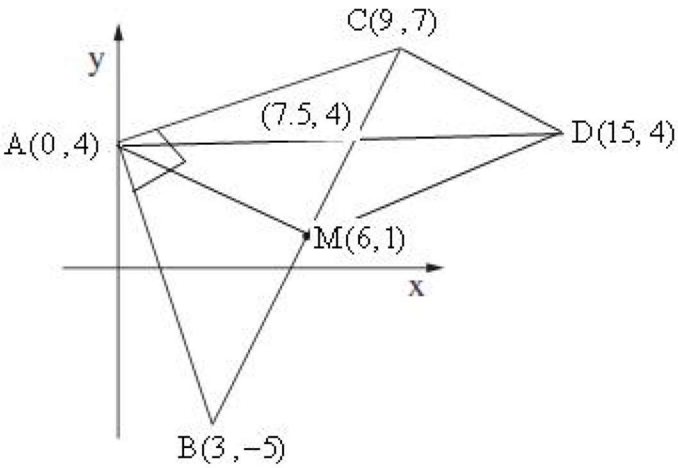
ב. נמצא את שיפוע הצלע AC **.**

$$m_{AC} = \frac{7-4}{9-0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

מתקבל ש- $m_{AC} \cdot m_{AB} = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$ **(שיפועים הופכיים לנגדיים)**

לכן צלעות אלו מקיימות את תנאי הניצבות.

תשובה: ΔBAC **ישר זווית** $(\measuredangle A = 90°)$ **.**



ג. נתון כי מרובע $AMDC$ **הוא מקבילית, כמתואר בציור.**

הנקודה M **היא אמצע הצלע** BC **,**

ולכן שיעוריה $(\frac{3+9}{2}, \frac{-5+7}{2}) = (6, 1)$ **, כלומר** $M(6, 1)$ **.**

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

שיעורי נקודת מפגש האלכסונים: $(\frac{6+9}{2}, \frac{1+7}{2}) = (7.5, 4)$ **.**

עתה נמצא את שיעורי הקדקוד D **, באמצעות הנקודה** A **ונקודת מפגש האלכסונים.**

$$\left.\begin{array}{ll} 7.5 = \frac{0 + x_D}{2} & 4 = \frac{4 + y_D}{2} \\ 15 = x_D & 8 = 4 + y_D \\ & y_D = 4 \end{array}\right\} D(15, 4)$$

תשובה: $D(15, 4)$ **.**

א. נציב $x=5$ **, במשוואת המעגל** $x^2+y^2=125$ **(שמרכזו** $O(0,0)$ **ורדיוסו** $\sqrt{125}$**)**

$$5^2+y^2=125$$
$$y^2=100 \quad \to y=\pm 10$$

תשובה: $A(5,10)$ **,** $B(5,-10)$**.**

ב. נמצא את משוואת הקוטר AC **, באמצעות שתי נקודות שעליו:** $A(5,10)$ **,** $O(0,0)$**.**

$m_{AC}=\frac{10-0}{5-0}=2$ **ובהתאם:** $\boxed{y=2x} \leftarrow y-0=-2(x-0)$ **.**

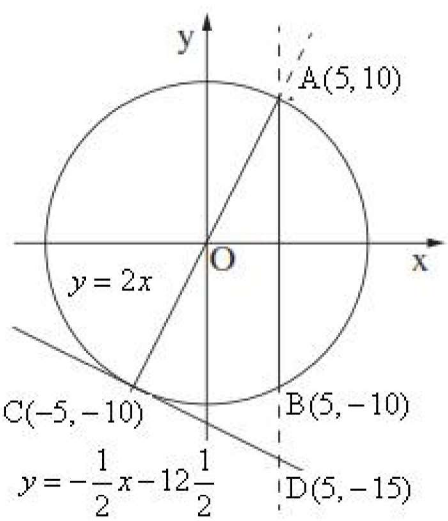
תשובה: משוואת הישר, שעליו מונח הקוטר AC **, היא** $y=2x$ **.**

ג. הרדיוס OC **מאונך למשיק בנקודת ההשקה** C **, כאשר שיפוע הרדיוס הוא** 2 **.**

ולכן על פי תנאי ניצבות $2\cdot m_{CD}=-1 \quad \to m_{CD}=-\frac{1}{2}$ **.**

נמצא את שיעורי הנקודה C **, כאשר** $O(0,0)$ **היא אמצע הקוטר ושיעורי** $A(5,10)$ **.**

$$\left.\begin{array}{ll} 0=\frac{5+x_C}{2} & 0=\frac{10+y_C}{2} \\ 0=5+x_C & 0=10+y_C \\ x_C=-5 & y_C=-10 \end{array}\right\} C(-5,-10)$$



$$y-(-10)=-\frac{1}{2}(x-(-5) \quad \to y+10=-\frac{1}{2}(x+5)$$
$$y+10=-\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2} \quad \to \boxed{y=-\frac{1}{2}x-12\frac{1}{2}}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{2}x-12\frac{1}{2}$ **.**

ד. המשיק $y=-\frac{1}{2}x-12\frac{1}{2}$ **חותך את הישר** $x=5$ **בנקודה** D**.**

נציב $x=5$ **במשוואת המשיק:**

$$y=-\frac{1}{2}\cdot 5-12\frac{1}{2} \qquad \to y=-15 \qquad \to \boxed{D(5,-15)}$$

תשובה: $D(5,-15)$**.**

א. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$.

תחום ההגדרה: $x \ge 0$ **(ביטוי בתוך השורש הריבועי חייב להיות אי-שלילי)**

תשובה: $x \ge 0$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית ואת סוגה.

$$y' = 2x - \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$0 = 2x - \frac{4}{2\sqrt{x}} \quad / \cdot 2\sqrt{x}$$

$$0 = 4x\sqrt{x} - 4$$

$$4 = 4x\sqrt{x} \quad / :4$$

$$1 = x\sqrt{x}$$

$$(1)^2 = (x\sqrt{x})^2$$

$$1 = x^2 \cdot x$$

$$1 = x^3$$

$$x = 1 \quad \to \quad y = 1^2 - 4\sqrt{1} = -3 \quad \to (1,-3)$$

(כיוון שהעלינו בריבוע שני אגפים, נבדוק שהפתרון נכון : $1 = 1\sqrt{1} \quad \to 1 = 1 \quad o.k.$ **)**

והנקודה החשודה כקיצון, היא $(1,-3)$.

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון:

$$f'(0.5) = 2\cdot 1 - \frac{4}{2\sqrt{0.5}} = -0.8 < 0, \quad f'(2) = 2\cdot 2 - \frac{4}{2\sqrt{2}} = 2.6 > 0$$

x	2	1	0.5	0
y'	+	0	-	
מסקנה	↗	Min	↘	

בנקודה שבה $x = 1$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.**

תשובה: $(1,-3)$ **מינימום .**

ג. תחומי עלייה וירידה, על פי הטבלה בסעיף הקודם:

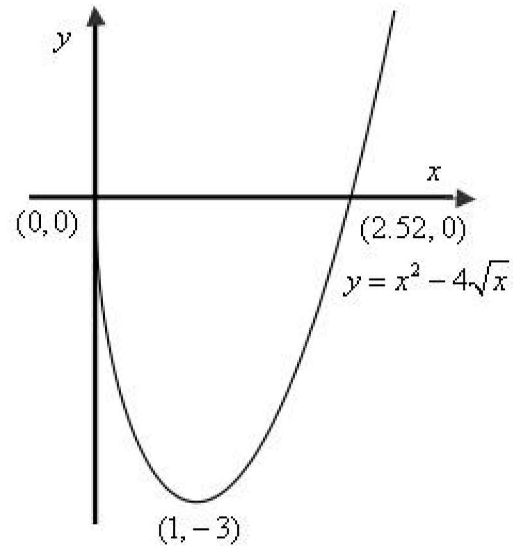
תשובה: עלייה: $x > 1$ **ירידה:** $0 < x < 1$.

ד. בנקודת החיתוך עם ציר y **מתקיים** $x = 0$ **ובהתאם** $f(0) = 0^2 - 4\sqrt{0} = 0$ **ולכן** $(0,0)$.

תשובה: $(0,0)$.

ה. הסקיצה המתאימה, לפי נקודת הקיצון ($(1,-3)$ מינימום),

שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים ($(0,0)$, $(2.52,0)$) ותחום ההגדרה.



א. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\boxed{f(x)=-4x^3+6x^2}$ **ואת סוגן.**

$$\boxed{f'(x)=-12x^2+12x}$$

$$0=-12x^2+12x$$

$$0=12x(-x+1)$$

$$x_1=0 \quad \to (0,0) \quad \leftarrow y=-4\cdot 0^3+6\cdot 0^2=0$$

$$x_2=1 \quad \to (1,2) \quad \leftarrow y=-4\cdot 1+6\cdot 1^2=2$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון

$$f'(-1)=-12\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)=-24<0$$

$$f'(0.5)=-12\cdot 0.5^2+12\cdot 0.5=3>0$$

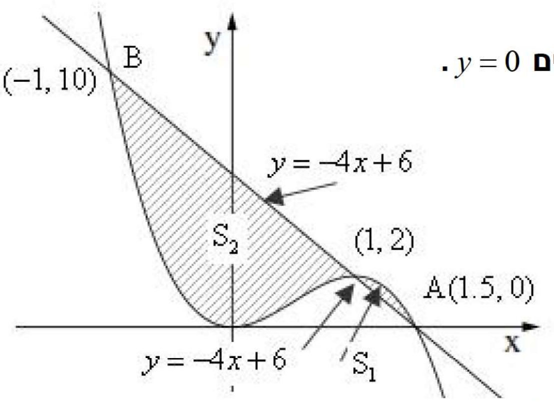
$$f'(2)=-12\cdot 2^2+12\cdot 2=-24<0$$

x	2	1	0.5	0	-1
y'	-	0	+	0	-
מסקנה	↘	**Max**	↗	**Min**	↘

ב- $x=0$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום , ב-** $x=1$ **עוברים מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $(0,0)$ **מינימום** , $(1,2)$ **מקסימום.**

ב. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **בה מתקיים** $y=0$ **.**



$$0=-4x^3+6x^2$$

$$0=2x^2(-2x+3)$$

$$x_1=0 \quad \to (0,0)$$

$$-2x+3=0 \quad \to -2x=-3 \quad \to x_2=1.5 \quad \to \boxed{A(1.5,0)}$$

תשובה: $A(1.5,0)$ **.**

ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה והישר $y=-4x+6$ **מפוצל לשני חלקים,** S_1 **ו-** S_2**.**

S_1 **- הפרש פונקציות:** $-4x^3+6x^2-(-4x+6)=-4x^3+6x^2+4x-6$ **.**

$$S_1=\int_1^{1.5}(-4x^3+6x^2+4x-6)\,dx$$

$$S_1=\frac{-4x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-6x\Big]_1^{1.5}$$

$$S_1=(-1.5^4+2\cdot 1.5^3+2\cdot 1.5^2-6\cdot 1.5)-(-1^4+2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-6\cdot 1)$$

$$S_1=-2\frac{13}{16}-(-3)$$

$$S_1=\frac{3}{16}$$

S_2 - **הפרש פונקציות:** $-4x+6-(-4x^3+6x^2)=-4x+6+4x^3-6x^2$.

$$S_2=\int_{-1}^{1}(-4x+6+4x^3-6x^2)\,dx$$

$$S_2=-\frac{4x^2}{2}+6x+\frac{4x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}\Big]_{-1}^{1}$$

$$S_2=(-2\cdot1^2+6\cdot1+1^4-2\cdot1^3)-(-2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+(-1)^4-2\cdot(-1)^3)$$

$$S_2=3-(-5)$$

$$S_2=8$$

ולכן סכום השטחים הוא: $\frac{3}{16}+8=8\frac{3}{16}$

תשובה: גודל השטח הוא $8\frac{3}{16}$ **יח"ר .**

א. נתון כי $x, z > 0$ **כאשר** $x \cdot z = 48$ **, כלומר** $z = \frac{48}{x}$

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *הסכום* $x + 3z$.

$$f(x) = x + 3 \cdot \frac{48}{x}$$

$$\boxed{f(x) = x + \frac{144}{x}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 144}{x^2}}$$

$$0 = \frac{x^2 - 144}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = x^2 - 144$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \quad \leftarrow x > 0$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(11) = 11^2 - 144 < 0, \quad f'(13) = 13^2 - 144 > 0$$

x	13	12	11	0
y'	+	0	-	
מסקנה	↗	Min	↘	

ב- $x = 12$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום , כאשר** $z = \frac{48}{12} = 4$

תשובה: $x = 12, z = 4$ **, עבורם הסכום** $x + 3z$ **הוא מינימלי.**

ב. הסכום המינימלי הוא $12 + 3 \cdot 4 = 24$

תשובה: הסכום המינימלי הוא 24 .