מכונית נסעה מעיר A **לעיר** B **על כביש ראשי במהירות קבועה.**

אורך הדרך בכביש הראשי מ- A **ל-** B **הוא** 240 **ק"מ.**

נתון כי בכביש הראשי עברה המכונית $\frac{2}{3}$ **מהדרך שבין** A **ל-** B **ב-** 2 **שעות ,**

כלומר עברה 160 **ק"מ** $= \frac{2}{3}\cdot 240$ **בשעתיים ולכן מהירותה הקבועה** 80 **קמ"ש** $= \frac{160}{2}$**.**

בדרך חזרה מעיר B **לעיר** A **נסעה המכונית בדרך עפר, הקצרה ב-** 40% **מהדרך בכביש הראשי.**

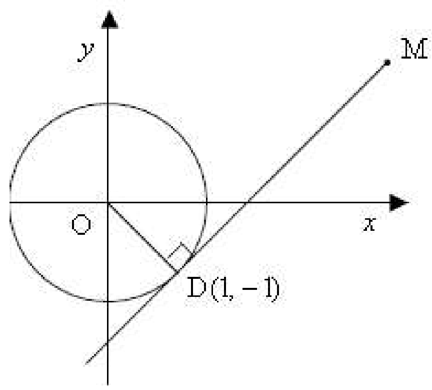
כלומר, אורך דרך העפר הוא 144 **ק"מ** $= (100\%-40\%)\cdot 240 = 0.6\cdot 240$

המהירות הייתה איטית ב- 10%**, כלומר** 72 **קמ"ש** $= (100\%-10\%)\cdot 80 = 0.9\cdot 80$ **.**

$s = vt$ **- המרחק** (s) **שווה למהירות** (v) **כפול זמן** (t)

לכן זמן הנסיעה בדרך העפר הוא : 2 **שעות** $= \frac{144}{72}$

תשובה: זמן הנסיעה של המכונית בדרך חזרה מ- B **ל-** A **הוא** 2 **שעות (שעתיים).**



א. משוואת המעגל הקנוני היא $x^2+y^2=R^2$

נציב את שיעורי הנקודה $D(1,-1)$ **ונקבל** $R^2=2 \quad \rightarrow \quad 1^2+(-1)^2=R^2$**.**

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+y^2=2$

ב. (1) שיפוע הישר OD **(רדיוס) הוא** $m=\frac{-1-0}{1-0}=-1$**.**

ולכן משוואת הישר העובר בראשית היא $y=-x$

תשובה: משוואת הישר OD **היא** $y=-x$

(2) המשיק מאונך לרדיוס בנקודה ההשקה ועל פי תנאי ניצבות: $m_{\text{DM}}=1$

$$\text{DM} \equiv y+1=1(x-1)$$
$$\text{DM} \equiv y=x-2$$

תשובה: משוואת המשיק DM **היא** $y=x-2$

ג. . נתון כי $\text{DM}=\sqrt{18}$**.**

נסמן את שיעורי הנקודה $M(x,x-2)$ **, בהתאם למשוואת הישר עליו היא נמצאת.**

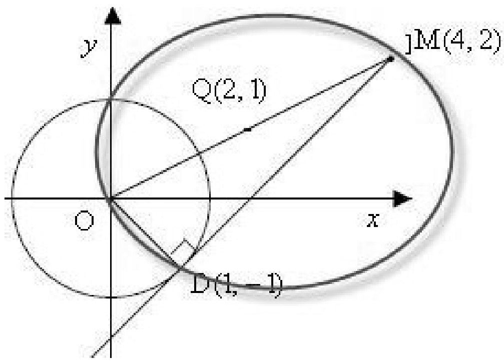
$$\sqrt{(x-1)^2+(x-2-(-1))^2}=\sqrt{18}$$
$$(x-1)^2+(x-1)^2=18$$
$$x^2-2x+1+x^2-2x+1=18$$
$$2x^2-4x-16=0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm12}{4}$$
$$x_1=4 \quad \rightarrow y=2 \quad \rightarrow \boxed{M(4,2)}$$
$$x_2=-2$$

הפתרון השני נפסל, כי על פי הנתון הנקודה M **נמצאת ברביע הראשון**

תשובה: $M(4,2)$

ד. משולש MDO **ישר זווית ולכן מרכז המעגל החוסם הוא באמצע היתר.**

הצלע MO **היא קוטר המעגל – נסמן את מרכז המעגל בנקודה** Q



$$\left.\begin{aligned} x_Q &= \frac{0+4}{2} = 2 \\ y_Q &= \frac{0+2}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{Q(2,1)}$$

משוואת המעגל היא $(x-2)^2 + (y-1)^2 = R^2$

נציב את שיעורי הנקודה $O(0,0)$

ונקבל $(0-2)^2 + (0-1)^2 = R^2 \quad \rightarrow R^2 = 5$ **.**

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

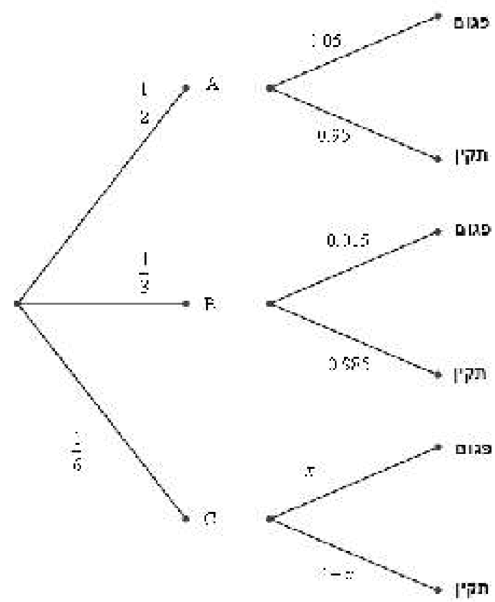
א. $\frac{1}{2}$ **מהכובעים מיוצרים במפעל** A **,** $\frac{1}{3}$ **מהכובעים מיוצרים במפעל** B**.**

לכן, $1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{1}{6}$ **מהכובעים מיוצרים במפעל** C

5% **מהכובעים המיוצרים במפעל** A **הם פגומים, כלומר** $P(A)=0.05 \quad \rightarrow P(\overline{A})=0.95$**.**

1.5% **מהכובעים המיוצרים במפעל** B **הם פגומים כלומר** $P(B)=0.015 \quad \rightarrow P(\overline{B})=0.985$**.**

3.5% **מהכובעים במלאי הם פגומים. נסמן** $P(C)=x \quad \rightarrow P(\overline{C})=1-x$



3.5% **מהכובעים במלאי הם פגומים, והמשוואה המתאימה:**

$$0.035=\frac{1}{2}\cdot 0.05+\frac{1}{3}\cdot 0.015+\frac{1}{6}\cdot x$$

$$0.005=\frac{1}{6}\cdot x \quad \rightarrow \boxed{x=0.03}$$

תשובה: ההסתברות שהכובע הוא פגום היא 0.03 **(**3% **מהכובעים המיוצרים במפעל** C **הם פגומים).**

ב. נמצא את ההסתברות שבמדגם מקרי של 6 **כובעים המיוצרים במפעל** C **יש לכל היותר כובע אחד פגום,**
כלומר 0 **כובעים פגומים, או כובע אחד פגום.**
ההסתברות ל- 0 **כובעים פגומים, (**6 **כובעים תקינים) היא** 0.97^6
ההסתברות ל- 1 **כובע פגום ע"י בנוסחת ברנולי: התפלגות בינומית, כאשר נתון כי** $p=0.03$ **,** $n=6$ **,** $k=1$

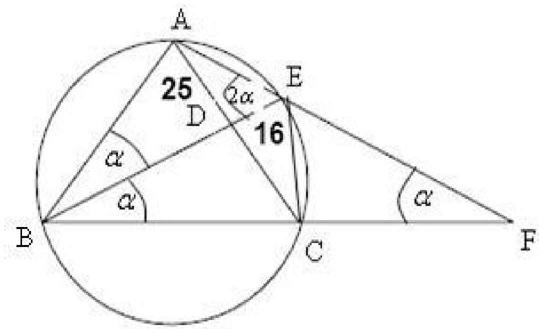
$$P_6(1)=\binom{6}{1}0.03^1(1-0.03)^{6-1}=\frac{6!}{1!(6-1)!}\cdot 0.03\cdot 0.97^5=6\cdot 0.03\cdot 0.97^5=0.1546$$

ולכן ההסתברות המבוקשת היא: $P=0.97^6+0.1546=0.9875$

תשובה: ההסתברות היא 0.9875 **.**

נכתב ע"י עפר ילין

4



<u>נתונים</u>

1. $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = \sphericalangle AFB$

2. $EF = 16$ **ס"מ**

3. $AF = 25$ **ס"מ**

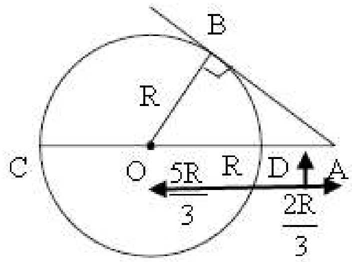
צ"ל: א. (1) $\Delta BAE \sim \Delta FAB$ **(2)** AB **(3)** BF

ב. $\Delta AEC \sim \Delta BEF$ **ג.** CF

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	4	$\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = \sphericalangle AFB = \alpha$	נתון + סימון
1	5	$\sphericalangle BAE = \sphericalangle FAB$	זווית משותפת
5 ,4	6	$\Delta BAE \sim \Delta FAB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל א (1)	
6	7	$\frac{BA}{FA} = \frac{BE}{FB} = \frac{AE}{AB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
3	8	$AF = 25$ ס"מ	נתון
2	9	$EF = 16$ ס"מ	נתון
9 ,8	10	$AE = 9$ ס"מ	הפרש קטעים
10 ,8 ,7	11	$AB^2 = 9 \cdot 25 = 225$	הצבה וחישוב
11	12	$AB = 15$ ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. א (2)	
4	13	$\frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BF}$	משפט חוצה זווית ΔFAB
13,12,10,9	14	$\frac{9}{16} = \frac{15}{BF}$	הצבה
14	15	$BF = 26\frac{2}{3}$ ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל א (3)	
	16	$\sphericalangle CAE = \sphericalangle EBC$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת $(\overset{\frown}{EC})$
	17	$\sphericalangle ECA = \sphericalangle ABE$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת $(\overset{\frown}{AE})$

4, 17	18	$\sphericalangle ECA = \sphericalangle AFB$	**כלל המעבר**
16, 18	19	$\Delta AEC \sim \Delta BEF$	**משפט דמיון זווית זווית**
מ.ש.ל. ב			
19	20	$\frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BF}=\frac{EC}{EF}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
4	21	$EC = AE =$ 9 **ס"מ**	**על זוויות היקפיות שוות מונחים מיתרים שווים**
21,20,15,9	22	$\frac{AC}{26\frac{2}{3}}=\frac{9}{16}$	**הצבה**
22	23	$AC =$ 15 **ס"מ**	**חישוב**
4	24	$CF =$ 15 **ס"מ**	**מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות** ΔACF
מ.ש.ל. ג			

נכתב ע"י עפר ילין



נתונים

1. AB **משיק למעגל** O**, בנקודה** B

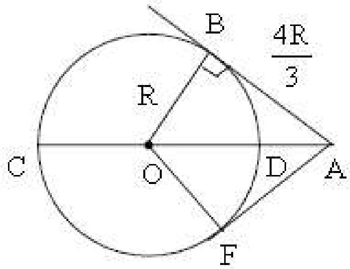
2. רדיוס המעגל R **.3** $AD=\frac{2R}{3}$

עבור ב' : 4. AF **משיק למעגל** O **בנקודה** F

צ"ל: א. AB **באמצעות** R **. ב.** $\sphericalangle BOA$ **ג.** $BF \perp AD$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	5	AB משיק למעגל O ב- B	נתון
5	6	$\sphericalangle OBA=90°$	הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
3	7	$AD=\frac{2R}{3}$	נתון
2	8	$OB=OB=R$	רדיוסים שווים זה לזה
8 ,7	9	$AD=\frac{5R}{3}$	סכום קטעים
9 ,8 ,6	10	$(\frac{5}{3}R)^2=R^2+(AB)^2$ $\frac{25R^2}{9}-R^2=(AB)^2$ $\frac{16R^2}{9}=(AB)^2$ $AB=\frac{4R}{3}$	משפט פיתגורס ΔOBA
מ.ש.ל. א			

ב.



$\underline{\Delta BOA}$

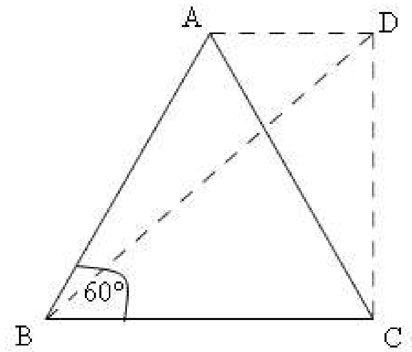
$$\tan\sphericalangle BOA=\frac{\frac{4R}{3}}{R}$$

$$\tan\sphericalangle BOA=\frac{4}{3}$$

תשובה: $\boxed{\sphericalangle BOA=53.13^\circ}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
4	11	AF **משיק למעגל** O **ב-** F	**נתון**
5, 11	12	$AB=AF$	**משיקים היוצאים למעגל מאותה נקודה שווים זה לזה**
8, 12	13	**דלתון** ABOF	**שני משולשים שווי שוקיים עם בסיס משותף**
13	14	$BF\perp AD$	**אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה**
		מ.ש.ל ג	

נכתב ע"י עפר ילין



א. (1) משולש ABC **הוא שווה צלעות (נתון)**

$\sphericalangle ABC = 60^\circ$ **(זוויות שוות במשולש שווה צלעות)**

על פי משפט הסינוסים:

$\underline{\Delta ABC}$

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC} = 2R \quad \rightarrow \frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$AC = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow AC = R\sqrt{3}$$

$$P_{\Delta ABC} = 3R\sqrt{3}$$

תשובה: היקף המשולש ABC **הוא** $3R\sqrt{3}$ **יח'.**

(2) $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ **(זוויות שוות במשולש שווה צלעות)**

$BC = R\sqrt{3}$ **(צלעות שוות במשולש שווה צלעות)**

$\underline{\Delta ABC}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot \sin 60^\circ$$

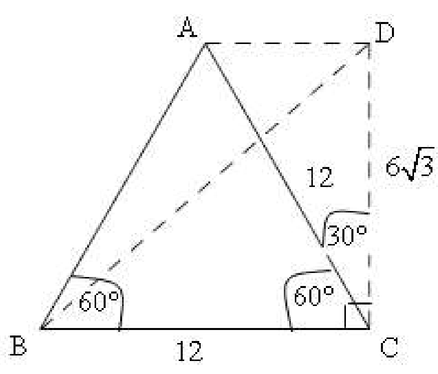
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

תשובה: שטח המשולש ABC **הוא** $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$ **יח"ר**

ב. $AD \parallel BC$ **(נתון)** $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ **(נתון)**

$R = 4\sqrt{3}$ **(נתון)** $AC = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 12$



$\sphericalangle DCB = 90^\circ$ **(זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל-** 180°

$\sphericalangle DCA = 30^\circ$ **(הפרש זוויות)**

$\underline{\Delta ACD}$

$$\cos 30^\circ = \frac{DC}{AC} \quad \rightarrow 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = DC$$

$$DC = 6\sqrt{3}$$

משפט פיתגורס: ΔBCD

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (DC)^2$$
$$(BD)^2 = 12^2 + (6\sqrt{3})^2$$
$$(BD)^2 = 252$$
$$\boxed{BD = 15.87}$$

תשובה: האורך של הקטע BD **הוא** 15.87 **ס"מ.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה פונקציה $f(x)=\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x-1}$.

תחום ההגדרה הוא $x\neq 3 \quad x\neq 1,$ **, כי** $x=1, x=3$ **מאפסים את מכנה הפונקציה.**

תשובה: $x\neq 3 \quad x\neq 1,$.

ב. $x=1, x=3$ **האסימפטוטות האנכיות, כי** $x=1, x=3$ **מאפסים מכנה ולא מונה.**

חזקת פולינום המונה בביטויים $\frac{3}{x-1}$ **,** $\frac{3}{x-3}$ (0) **קטנה מחזקת פולינום המכנה** (1)

ולכן ביטויים אלה שואפים ל- 0 **, עבור** x **-ים השואפים ל-** ∞ .

תשובה $x=1, x=3$ **אסימפטוטות אנכיות,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית**

ג. נמצא את שיעור ה- x **של נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.**

$$\boxed{f(x)=\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x-1}}$$

$$f'(x)=-\frac{3}{(x-3)^2}+\frac{3}{(x-1)^2}=\frac{-3(x-1)^2+3(x-3)^2}{(x-3)^2(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-3(x^2-2x+1)+3(x^2-6x+9)}{(x-3)^2(x-1)^2}=\frac{-3x^2+6x-3+3x^2-18x+27}{(x-3)^2(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-12x+24}{(x-3)^2(x-1)^2}}$$

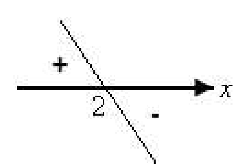
$$0=-12x+24 \quad \to x=2$$

הפתרון היחיד בתחום ההגדרה , ובהתאם $f(2)=\frac{3}{2-3}-\frac{3}{2-1}=-6$:

נמצא את סוג נקודות הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי), בעזרת ציור גרף סימני $f'(x)$ **,**

כאשר מכנה הנגזרת חיובי והמונה הוא ביטוי אלגברי של פונקציה קווית יורדת.

גרף סימני $f'(x)$



x		3		2		1	
$f'(x)$	-		-		+		+
מסקנה	↘		↘	**Max**	↗		↗

תשובה: $(2,-6)$ **מקסימום.**

נכתב ע"י עפר ילין

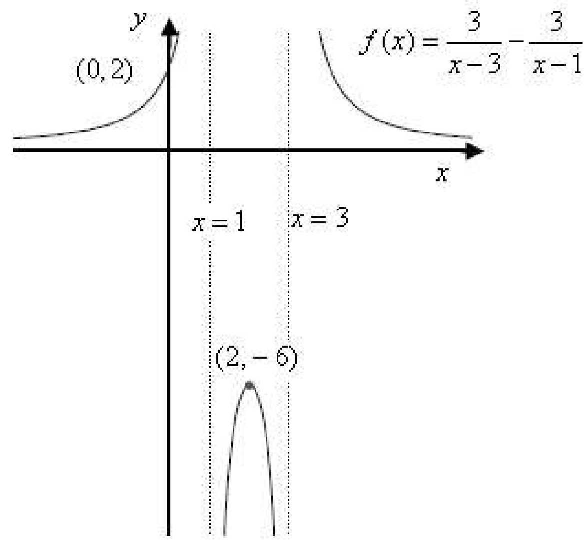
ד. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן** $f(0)=\frac{3}{0-3}-\frac{3}{0-1}=2$ **שיעורי נקודת החיתוך** $(0,2)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ולכן** $0=\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x-1} \quad \rightarrow \frac{3}{x-1}=\frac{3}{x-3}$ **וקל לראות שאין פתרון**

ואין חיתוך עם ציר ה- x **.**

תשובה: $(0,2)$ **.**

ה. הסקיצה המתאימה



ו. על פי הסקיצה ניתן לראות כי קבוצת הפתרונות של הפונקציה אינה כוללת את הערכים $-6<y\le 0$

תשובה: נקודה ששיעור ה- y **שלה הוא** -5 **<u>אינה</u> נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$ **.**

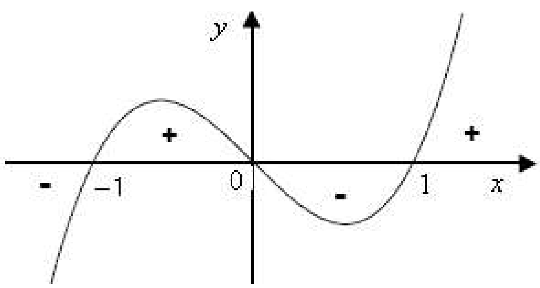
א. נתונה פונקציה $f(x)=x^3-ax$ **, כאשר על פי הנתון** $f'(\frac{\sqrt{3}}{3})=0$ **.**

$$f'(x)=3x^2-a$$
$$0=3(\frac{\sqrt{3}}{3})^2-a$$
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$ **.**

נציב $a=1$ **ונקבל:** $f(x)=x^3-x$

ב. (1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ולכן** $0=x^3-x \quad \to 0=x(x^2-1) \quad \to x=0,\pm1$ **.**



תשובה: $(-1,0),\quad (0,0),\quad (1,0)$

(2) על פי סעיף ב (1) הקודם והציור משמאל

$f(x)$ **חיובית עבור** $x>1$ **או** $-1<x<0$

$f(x)$ **שלילית עבור** $0<x<1$ **או** $x<-1$

(3) נתון כי $g'(x)=f(x)$

על פי הנתון וסעיף ב (2) $g'(x)>0$ **עבור** $x>1$ **או** $-1<x<0$ **ולכן** $g(x)$ **עולה בתחומים אלו**

$g'(x)<0$ **עבור** $0<x<1$ **או** $x<-1$ **ולכן** $g(x)$ **יורדת בתחומים אלו.**

לכן ניתן להציג טבלת עלייה וירידה של $g(x)$

x		1		0		-1	
$f'(x)$	+		-		+		-
מסקנה	↗	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**	↘

תשובה: $x=0$ **מקסימום ,** $x=1$ **מינימום ,** $x=-1$ **מינימום**

ג. נמצא את הפונקציה הקדומה של $f(x)$ **, כלומר את** $g(x)$ **:**

$$g(x)=\int f(x)\,dx$$
$$g(x)=\int (x^3-x)\,dx$$
$$g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+c$$

הישר $y=-7$ **משיק לגרף הפונקציה** $g(x)$ **בנקודת המקסימום שלה,**

כלומר נקודת המקסימום של $g(x)$ **היא** $(0,-7)$ **, על פי סעיף ב (3).**

$$-7=\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}+c \quad \to c=-7$$

$$\boxed{g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-7}$$

תשובה: $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-7$

9

א. גרף I **מתאים ל-** $g(x)=\cos^2 x+1$ **שכן זו פונקציה חיובית וגרף** I **כולו מעל ציר ה-** x **.**

גרף II **מתאים ל-** $f(x)=\sin x$ **שכן פונקציה זו עוברת בראשית הצירים.**

ב. (1) הנקודה A **נמצאת על גרף הפונקציה** $g(x)=\cos^2 x+1$ **בתחום** $0\le x\le \frac{3\pi}{2}$ **.**

הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא אורך הקטע AB

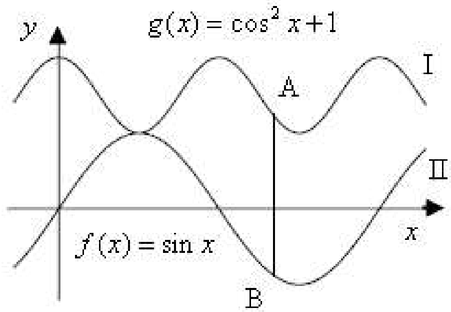
שיעורי נקודה A **של** $g(x)$ **הם** $A(x,\cos^2 x+1)$

AB **מקביל לציר ה-** y **ולכן שיעורי ה-** x **שווים.**

שיעורי נקודה B **של** $f(x)$ **הם** $A(x,\sin x)$

$AB=y_B-y_A$

$\boxed{AB(x)=\cos^2 x+1-\sin x}$



נמצא נקודות קצה ולאחר מכן נקודות קיצון.

$AB(0)=\cos^2 0+1-\sin 0=0 \quad \to (0,2)$

$AB(\frac{3\pi}{2})=\cos^2(\frac{3\pi}{2})+1-\sin(\frac{3\pi}{2})=2 \quad \to (\frac{3\pi}{2},2)$

$\boxed{(AB)'(x)=-2\cos x\sin x-\cos x}$

$0=-2\cos x\sin x-\cos x$

$0=\cos x(-2\sin x-1)$

$\cos x=0 \qquad \sin x=-0.5=\sin-\frac{\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

k	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$	$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$	$x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$
0	$\frac{\pi}{2}$ **קצה**	-	$\frac{7\pi}{6}$
1	$\frac{3\pi}{2}$ **קצה**	-	-

$AB(\frac{7\pi}{6})=\cos^2(\frac{7\pi}{6})+1-\sin(\frac{7\pi}{6})=2.25 \quad \to (\frac{7\pi}{6},2.25)$

נמצא את סוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
y	2		2.25		2
מסקנה	**Min**	↗	**Max**	↘	**Max**

תשובה: $x=\frac{7\pi}{6}$ עבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

(2) האורך המקסימלי של הקטע AB הוא 2.25 יחידות.