א. נסמן ב- x **את מהירות הולך הרגל (קמ"ש), ובהתאם** $x+10$ **מהירות רוכב האופניים (קמ"ש).**

נשים לב שכאשר הלכו זה לקראת זה, 36 **דקות נוספות (בין הדקות ה-** 24 **ל-** 60 **),**

עברו יחדיו 12 **ק"מ ב-** 36 **דקות (או** $0.6=\frac{36}{60}$ **שעה)**

$s=vt$ **- המרחק** (s) **שווה למהירות** (v) **כפול זמן** (t)

	זמן t שעות	מהירות v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
הולך הרגל	0.6	x	$0.6x$
רוכב האופניים	0.6	$x+10$	$0.6(x+10)$

לכן, המשוואה המתאימה: $0.6x+0.6(x+10)=12$

נפתור את המשוואה:

$$0.6x+0.6(x+10)=12$$
$$0.6x+0.6x+6=12$$
$$1.2x=6 \quad /:10$$
$$\boxed{x=5}$$

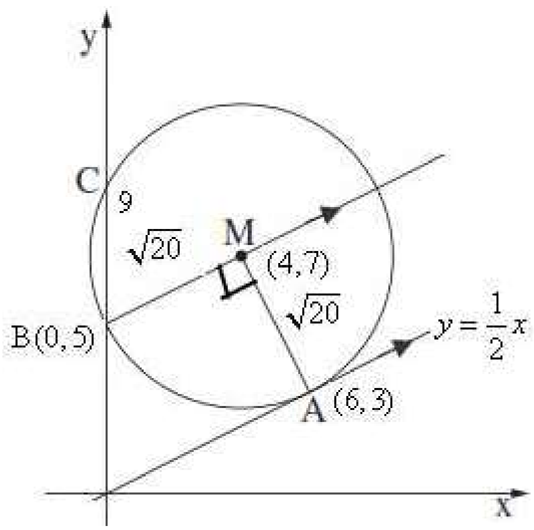
מהירות הולך הרגל 5 **קמ"ש ומהירות רוכב האופניים** 15 **קמ"ש.**

תשובה: מהירות רוכב האופניים 15 **קמ"ש.**

ב. רוכב האופניים עבר עד הפגישה 60 **דקות** $=24+36$ **, כלומר שעה אחת.**

כיוון שמהירותו 15 **ק"מ, הרי שהמרחק שעבר מיישוב** A **היה** 15 **ק"מ.**

תשובה: הפגישה הייתה במרחק של 15 **ק"מ מיישוב** A **.**



א. (1) הישר משיק למעגל, לכן שיפוע הרדיוס AM **הוא** -2**,**

כי הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

שיעורי מרכז המעגל, הנמצא על הישר $y=7$ **הם** $(a,7)$**.** $(6,3)$

$$-2=\frac{3-7}{6-a}$$
$$-12+2a=-4$$
$$a=4$$

תשובה: שיעורי מרכז המעגל הם $(4,7)$**.**

(2) נמצא את אורך הרדיוס (AM **).**

$$R=\sqrt{(4-6)^2+(7-3)^2}=\sqrt{20}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-4)^2+(y-7)^2=20$

ב. (1) נציב $x=0$ **במשוואת המעגל**

$$(0-4)^2+(y-7)^2=20$$
$$(y-7)^2=4$$
$$y-7=2 \quad y-7=-2$$
$$y=5 \quad y=9$$

ועל פי הציור הנתון $\mathrm{B}(0,5)$

$$m_{\mathrm{BM}}=\frac{5-7}{0-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

קבלנו שהשיפועים שווים ולכן BM **מקביל למשיק ב-** A**.**

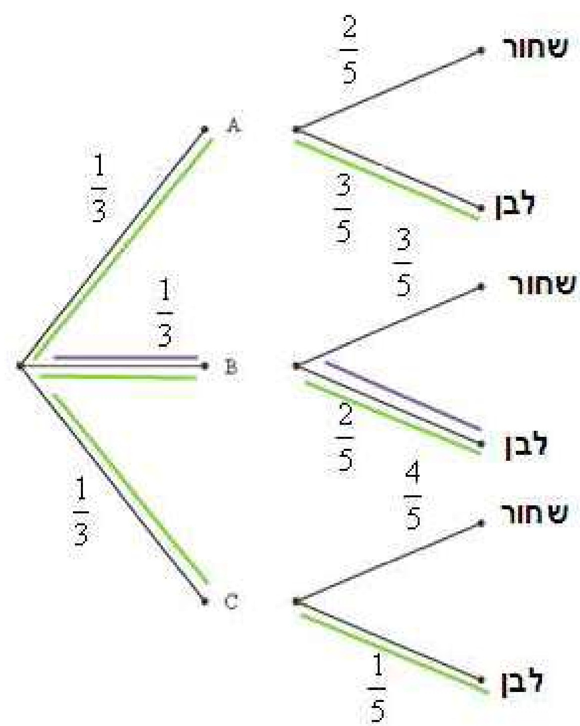
תשובה: הוכח.

(2) כיוון BM **מקביל למשיק ב-** A **ו-** AM **מאונך למשיק, הרי ש-** $\sphericalangle \mathrm{BMA}=90^\circ$

$$S_{\Delta\mathrm{BMA}}=\frac{\mathrm{BM}\cdot\mathrm{MA}}{2}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}{2}=10.$$

תשובה: $S_{\Delta\mathrm{BMA}}=10$

א. (1) נציג עץ אפשרויות מתאים.



כאשר מחשבים הסתברות מותנית באמצעות עץ, מומלץ לצבוע.

בירוק צבועים שלושת המסלולים המתאימים להוצאת כדור לבן.

בסגול האפשרות להוצאת כדור לבן מקופסה B **עבור תת סעיף א (2)**

$$p(white\ ball)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=0.4$$

תשובה: ההסתברות להוציא כדור לבן היא 0.4 **.**

(2) יש למצוא את ההסתברות שהכדור יצא מקופסה B **, כאשר ידוע שהכדור לבן.**

כלומר את ההסתברות של המסלול הסגול מתוך המסלולים הירוקים

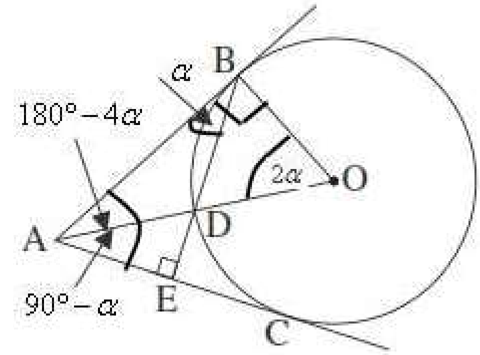
$$p(box\ \text{B}/\ white\ ball)=\frac{P(box\ \text{B}\cap white\ ball)}{P(white\ ball)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{0.4}=\frac{1}{3}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{1}{3}$ **.**

ב. בקופסה C **יש רק כדור לבן אחד, כלומר יש להוציא לבן ושחור (אם יוצא לבן, נותרו רק שחורים) , או שחור ולבן.**

$$p=\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=0.4$$

תשובה: ההסתברות היא 0.4 **.**



נתונים

1. AB **משיק למעגל ב-** B.

עבור ב:

2. AC **משיק למעגל ב-** C.

3. $BE \perp AC$.

צ"ל:

א. $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$

ב. (1) $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DBE$ **(2)** $BD = AD$

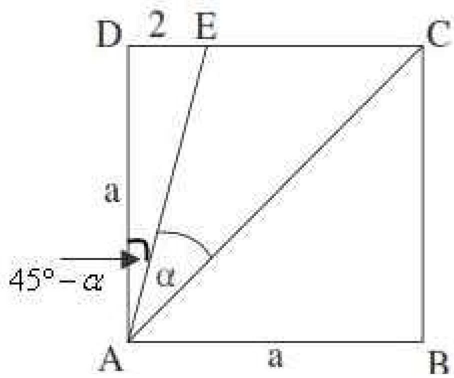
הסבר		טענה	נימוק
1	4	AB **משיק למעגל ב-** B	נתון
4	5	$\sphericalangle ABD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \alpha$	זווית בין משיק למיתר + סימון
	6	$\sphericalangle BOD = \overset{\frown}{BD} = 2\alpha$	הקשת שווה לזווית המרכזית הנשענת עליה
6, 5	7	$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$	הצבה
		מ.ש.ל. א.	
4	8	$\sphericalangle OBA = 90°$	הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
8, 6	9	$\sphericalangle BAO = 90° - 2\alpha$	סכום זוויות $180°$ ב- ΔBAO
2	10	AC **משיק למעגל ב-** C	נתון
4, 9, 10	11	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE$ $\sphericalangle BAE = 180° - 4\alpha$	אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הקטע המחבר את הנקודה למרכז המעגל חוצה את הזוויות שבין המשיקים
3	12	$BE \perp AC$	נתון
12, 5	13		חישוב
13, 11	14	$90° - \alpha = 180° - 4\alpha$ $\alpha = 30°$	כלל המעבר + חישוב
6	15	$\sphericalangle BOD = 60°$	הצבה וחישוב
13, 9	16	$\sphericalangle DAE = 30°$	הפרש זוויות
15, 16	17	$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DAE$	חישוב
		מ.ש.ל. ב (1)	
5, 11, 16	18	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 30°$	הצבה
18	19	$BD = AD$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔBAD
		מ.ש.ל. ב (2)	

א. 2 **ס"מ** $= \mathrm{DE}$ **(נתון)** a **ס"מ** $= \mathrm{AD}$ **(נתון)**

$\sphericalangle \mathrm{EBC} = \alpha$ **(נתון)**

$\sphericalangle \mathrm{DAC} = 45°$ **(זוויות הריבוע ישרות והאלכסון חוצה זווית),**

$\sphericalangle \mathrm{DAE} = 45° - \alpha$ **(הפרש זוויות).**



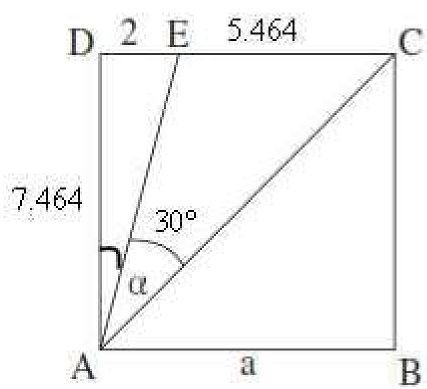
$\underline{\Delta \mathrm{DAE}}$ **(ישר זווית,** $\sphericalangle \mathrm{D} = 90°$)

$$\tan \sphericalangle \mathrm{DAE} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}$$

$$\boxed{a = \frac{2}{\tan(45° - \alpha)}}$$

תשובה: $a = \dfrac{2}{\tan(45° - \alpha)}$ **.**

ב. נתון כי $\alpha = 30°$ **.**



$$a = \frac{2}{\tan(45° - 30°)} = \frac{2}{\tan(15°)} = 7.464$$

$$\mathrm{EC} = 7.464 - 2 = 5.464$$

$$S_{\Delta \mathrm{ACE}} = \frac{\mathrm{EC} \cdot \mathrm{AD}}{2} = \frac{5.464 \cdot 7.464}{2} = 20.39 \text{ סמ"ר}$$

תשובה: שטח $\Delta \mathrm{ACE}$ **הוא** 20.39 **סמ"ר.**

ג. נתון כי 2 **ס"מ** $= \mathrm{DE} = \mathrm{DE}$ **, לכן** $a = 4$ **.**

$$4 = \frac{2}{\tan(45° - \alpha)}$$

$$\tan(45° - \alpha) = 0.5$$

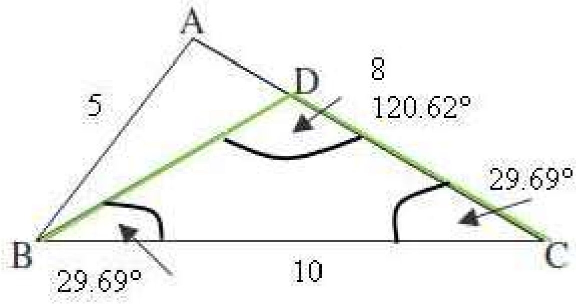
$$45° - \alpha = 26.565° + 180° k$$

$$\boxed{\alpha = 18.435°} \quad \leftarrow k = 0,\ 0 < \alpha < 45°$$

תשובה: $\alpha = 18.43°$ **.**

א. $AB = 5$ **ס"מ (נתון)** , $AC = 8$ **ס"מ (נתון)** , $BC = 10$ **ס"מ (נתון)**

$BD = DC$ **(נתון והצבה).**



נמצא את $\sphericalangle C$ **במשולש** ABC **, באמצעות משפט הקוסינוסים.**

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle C$$
$$5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \sphericalangle C$$
$$160 \cos \sphericalangle C = 139$$
$$\boxed{\sphericalangle C = 29.69°}$$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle C = 29.69°$ **(מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔBDC **)**

$\sphericalangle BDC = 180 - 2 \cdot 29.69° = 120.62°$ **(סכום זוויות** $180°$ ΔBDC **)**

תשובה: $\sphericalangle C = 29.69°$ **,** $\sphericalangle DBC = 29.69°$ **,** $\sphericalangle BDC = 120.62°$

ב. נחשב את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את ΔABD **(** R_1 **),**

לרדיוס המעגל החוסם את ΔBDC **(** R_2 **)**

$\underline{\Delta ABD}$	$\underline{\Delta BDC}$
$\frac{AB}{\sin \sphericalangle ADB} = 2R_1$	$\frac{BC}{\sin \sphericalangle BDC} = 2R_2$
$R_1 = \frac{5}{2 \sin \sphericalangle ADB}$	$R_2 = \frac{10}{2 \sin \sphericalangle BDC}$
$\boxed{R_1 = \frac{2.5}{\sin \sphericalangle ADB}}$	$\boxed{R_2 = \frac{5}{\sin \sphericalangle BDC}}$

נמצא את היחס $R_1 : R_2$ **, כאשר** $\sin \sphericalangle ADB = \sin \sphericalangle BDC$ **כי זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$**.**

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{2.5}{\sin \sphericalangle ADB}}{\frac{5}{\sin \sphericalangle BDC}} = \frac{1}{2}$$

ניתן, כמובן, גם לחשב את כל אחד מהרדיוסים ואז למצוא את היחס.

תשובה: היחס הוא $1:2$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}$.

תחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי, ומכנה שונה מאפס.

$x^2-4\ge 0 \leftarrow$ $(x-2)(x+2)\ge 0$ **והגרף המתאים של פרבולה בעלת מינימום.**

ולכן $x\ge 2$ **או** $x\le -2$ **ובתחומים אלו מתקיים גם** $x\ne 0$ **.**

תשובה: $x\ge 2$ **או** $x\le -2$.

ב. אין נקודת החיתוך עם ציר ה- y **כי** $x=0$ **לא בתחום ההגדרה.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(2,0)$, $(-2,0)$.

תשובה: $(2,0)$, $(-2,0)$.

ג. נמצא נקודות הקיצון המוחלט.

$(2,0)$, $(-2,0)$ **הן נקודות הקצה, שתהיינה נקודות מינימום מוחלט כי הפונקציה אי-שלילית.**

$$f'(x)=\frac{\frac{\cancel{2}x\cdot x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}-2x\sqrt{x^2-4}}{x^4}=\frac{x^3-2x(x^2-4)}{x^4\sqrt{x^2-4}}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-2x^3+8x}{x^4\sqrt{x^2-4}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-x^3+8x}{x^4\sqrt{x^2-4}}}$$

$$0=-x^3+8x \quad \rightarrow 0=x(-x^2+8)$$

$$x=0 \quad not\ o.k.$$

$$x=\sqrt{8} \quad \rightarrow y=\frac{\sqrt{8-4}}{8}=0.25 \quad \rightarrow (\sqrt{8},0.25)$$

$$x=-\sqrt{8} \quad \rightarrow y=\frac{\sqrt{8-4}}{8}=0.25 \quad \rightarrow (-\sqrt{8},0.25)$$

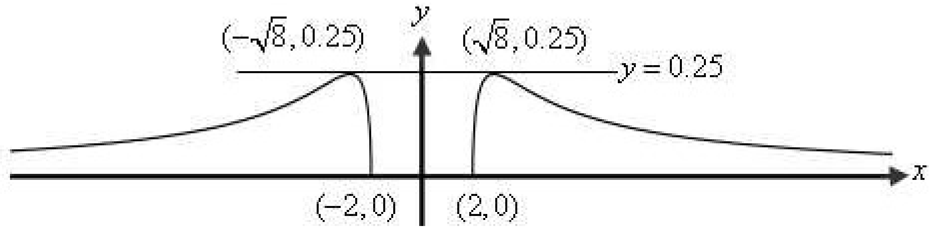
$$y(-3)=\frac{\sqrt{9-4}}{9}=0.248, \quad y(3)=\frac{\sqrt{9-4}}{9}=0.248$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

x		$-\sqrt{8}$		-2		2		$\sqrt{8}$	3
$f(x)$	0.248	0.25		0		0		0.25	0.248
מסקנה	↗	Max	↘	Min		Min	↗	Max	↘

תשובה: $(2,0)$, $(-2,0)$ **מינימום מוחלט ,** $(\sqrt{8},0.25)$ $(-\sqrt{8},0.25)$ **מקסימום מוחלט.**

ד. (1) הסקיצה המתאימה:



(2) הישר $y = 0.25$ **משיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות המקסימום המוחלט שלה.**

תשובה: $y = 0.25$ **.**

א. (1) לשתי הפונקציות משיק משותף בנקודה A **,**

שאת שיעור ה- x **שלה נסמן ב-** t **.**

כלומר: $f'(t)=g'(t)$

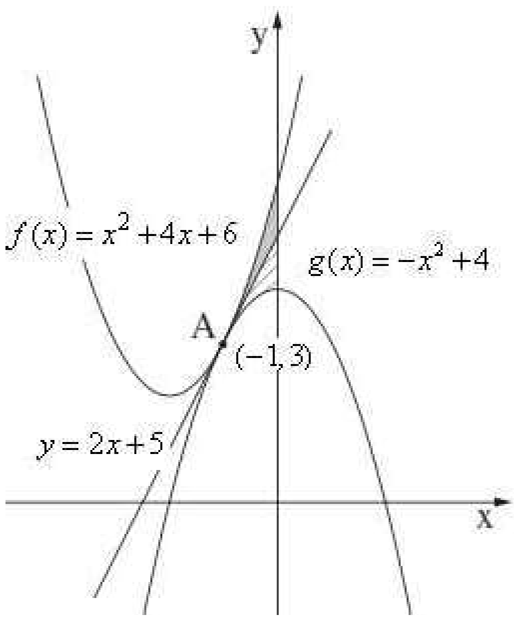
$$f(x)=x^2+4x+6$$
$$f'(x)=2x+4$$
$$f'(t)=2t+4$$
$$g(x)=-x^2+x$$
$$g'(x)=-2x$$
$$g'(t)=-2t$$

תשובה: $2t+4$ **או** $-2t$ **.**

(2) כפי שהסברנו $f'(t)=g'(t)$

$$2t+4=-2t$$
$$4t=-4 \quad /:4$$
$$t=-1 \to f(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)+6=3 \to \boxed{A(-1,3)}$$

תשובה: $A(-1,3)$



(3) נציב את שיעורי $A(-1,3)$ **בפונקציה** $g(x)=-x^2+c$

$$3=-(-1)^2+c$$
$$\boxed{c=4}$$

תשובה: $c=4$ **.**

ב. נקודת ההשקה $A(-1,3)$ **, שיפוע המשיק** $m=f'(1)=2$

$$y-3=2(x-(-1))$$
$$\boxed{y=2x+5}$$

$g(x)=-x^2+4$ **, הפרבולה בעלת המקסימום:**

כיוון שגבולות שני השטחים זהים, ויש להוכיח ששני השטחים שווים,

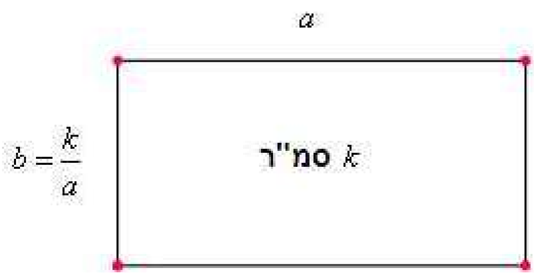
הרי שאם הפרש הפונקציות, בכל אינטגרל של חישוב השטח, יהיה שווה – אז השטחים יהיו שווים.

<u>הפרש הפונקציות בשטח התחתון</u>	**<u>הפרש הפונקציות בשטח העליון</u>**
$2x+5-(-x^2+4)$	$x^2+4x+6-(2x+5)$
$2x+5+x^2-4$	$x^2+4x+6-2x-5$
x^2+2x+1	x^2+2x+1

ואכן הפרש הפונקציות שווה, והשטחים יהיו שווים בשטחם.

תשובה: הוכח.

א. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *היקף המלבן*.



שטח המלבן הוא k סמ"ר.

אם a ס"מ אורך המלבן, ו- b ס"מ רוחב המלבן,

אז $ab=k$ **ובהתאם** $b=\frac{k}{a}$

$$f(a)=x+40+90+\frac{3600}{x}$$

$$\boxed{P(a)=2a+\frac{2k}{a}}$$

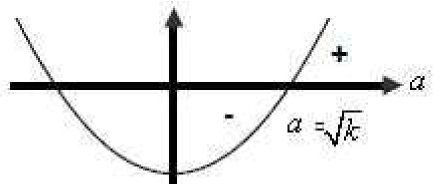
$$P'(a)=2-\frac{2k}{a^2}$$

$$\boxed{p'(a)=\frac{2a^2-2k}{a^2}}$$

$$2=2a^2-2k$$

$$\boxed{a=\sqrt{k}} \quad \leftarrow a>0$$

$$b=\frac{k}{\sqrt{k}} \quad \rightarrow \boxed{b=\sqrt{k}}$$



מכנה הנגזרת חיובי, כאשר מונה הנגזרת פרבולה ישרה, בעלת מינימום,

לכן הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות עבור $a=\sqrt{k}$**,**

הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.

תשובה: צלעות המלבן הן $\sqrt{k}$**, כלומר המלבן שהיקפו מינימלי הוא ריבוע.**

ב. קוטר המעגל החוסם את המלבן, שהיקפו מינימלי, הוא אלכסון המלבן,

(כי זוויות המלבן ישרות והקוטר נשען על זווית היקפית ישרה)

נמצא את הערך של k **באמצעות משפט פיתגורוס:**

$$8^2=(\sqrt{k})^2+(\sqrt{k})^2$$

$$64=2k \quad /:2$$

$$\boxed{k=32}$$

תשובה: $k=$ 32 **ס"מ.**