א. נסמן ב- x **(שקלים) את מחיר הספה, וב-** y **(שקלים) את מחיר הכורסה.**

מחיר הספה גדול ב- 1500 **שקל ממחיר הכורסה, ובהתאם** $x=y+1500$ **.**

(נוח להישאר עם שני משתנים, בגלל העבודה עם האחוזים בהמשך.)

בסוף השנה עלה מחיר הספה ב- 8%**, ולכן מחירה התייקר ב-** $\frac{8}{100}\cdot x=0.08x$ **.**

בסוף השנה ירד מחיר הכורסה ב- 10%**, ולכן מחירה הוזל ב-** $\frac{10}{100}\cdot y=0.1y$ **.**

מחיר הספה עלה באותו הסכום שהמחיר של 2 **כורסאות ירד, ולכן** $0.08x=2\cdot 0.1y$ **ומכאן ש-** $x=2.5y$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x=y+1500 \\ x=2.5y \end{cases}$$

$$2.5y=y+1500$$

$$1.5y=1500 \quad /:1.5$$

$$\boxed{y=1000} \quad \rightarrow \boxed{x=2500}$$

תשובה: מחיר הספה $2{,}500$ **שקל ומחיר הכורסה** $1{,}000$ **שקל, לפני שינוי המחירים.**

ב. משה קנה בסוף השנה 3 **כורסאות וספה אחת.**

עבור הכורסאות שילם: $2{,}700$ ₪ $=3\cdot 0.9\cdot 1000=3\cdot 90\%\cdot 1000$ **.**

עבור הספה שילם: $2{,}700$ ₪ $=1.08\cdot 2500=108\%\cdot 2500$ **.**

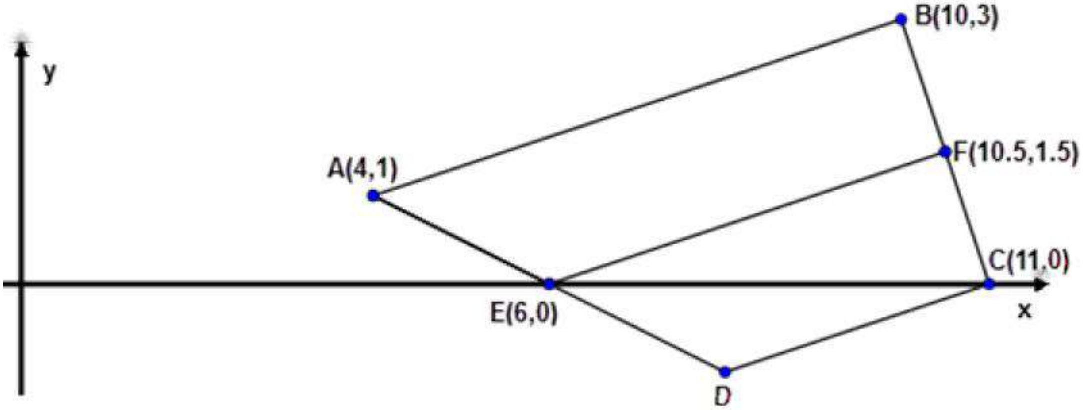
בסך הכול שילם משה $5{,}400$ **₪.**

אם היה קונה לפני שינוי המחירים, היה משלם: $5{,}500$ ₪ $=3\cdot 1000+2500$ **.**

לכן משה חסך 100 **₪ מתוך** $5{,}500$ **₪, המהווים:** $\frac{100}{5{,}500}=0.01818=1.818\%$ **.**

תשובה: הסכום, ששילם משה עבור הקנייה שלו, קטן ב- 1.818% **מהסכום שהיה משלם לפני שינוי המחירים.**

א. שיפוע הצלע AB **, הוא** $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3-1}{10-4} = m_{AB}$ **, ולכן שיפוע הצלע המאונכת (ההופכי והנגדי) הוא** $m_{BC} = -3$ **.**



$$-3 = \frac{3-0}{10-x_C} \quad /:3$$

$$-1 = \frac{1}{10-x_C}$$

$$-10 + x_C = 1$$

$$x_C = 11$$

תשובה: $C(11,0)$ **.**

ב. נבדוק האם הקטע המחבר את E **לאמצע הצלע** BC **הוא קטע אמצעים בטרפז** $ABCD$ **.**

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} = \frac{1-0}{4-6} = m_{AE}$ **, ולכן** AD **לא מקביל ל-** BC **ו-** $ABCD$ **טרפז (חישוב השיפוע נדרש גם לסעיף ג).**

$F(\frac{10+11}{2}, \frac{3+0}{2}) \rightarrow F(10.5,1.5)$ **.**

$\frac{1}{3} = \frac{1.5}{4.5} = \frac{1.5-0}{10.5-6} = m_{EF}$ **ומכאן ש-** $EF \parallel AB$ **(השיפועים שווים).**

לכן, הקטע המחבר את E **לאמצע הצלע** BC **הוא קטע אמצעים בטרפז ו-** E **היא אמצע הצלע** AD **.**

תשובה: E **היא אמצע הצלע** AD **.**

ג. כפי שהראינו בסעיף ב, AD **לא מקביל ל-** BC **ולכן** $\measuredangle D$ **אינה ישרה.**

מכאן שהמיתר EC **לא נשען על זווית ישרה, במעגל החוסם את** ΔEDC **, והוא אינו קוטר במעגל זה.**

תשובה: EC **אינו קוטר במעגל החוסם את** ΔEDC **.**

א. בשקית א' יש 7 מטפחות צהובות ו- 5 מטפחות אדומות,

לכן: $P(\text{red})=\frac{5}{12}, P(\text{yellow})=\frac{7}{12}$ **בהוצאת מטפחת אחת משקית א'.**

ההסתברות שהוציאו שתי מטפחות צהובות, אחת מכל שקית, היא: $\frac{7}{40}$.

מכאן שאם p **היא ההסתברות להוצאת מטפחת אחת צהובה משקית ב', אז** $\frac{7}{12}\cdot p=\frac{7}{40}$ $\leftarrow$ $p=\frac{3}{10}$ **,**

ובשקית ב' יש 3 מטפחות צהובות ו- 7 מטפחות אדומות.

תשובה: בשקית ב' יש 3 מטפחות צהובות.

ב. נחשב את ההסתברות שהמטפחת שהוצאה משקית ב' היא צהובה,

אם ידוע שהמטפחות שהוצאו הן בצבעים שונים.

$$P(\text{yellow from bag b /different colours})=\frac{P(\text{yellow from bag b}\cap\text{different colours})}{P(\text{different colours})}$$

$$P(\text{yellow from bag b /different colours})=\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{8}{15}}=\frac{15}{64}$$

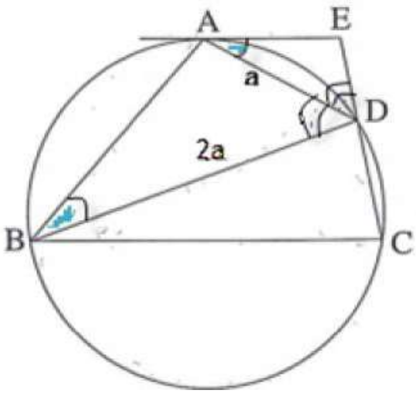
תשובה: ההסתברות היא $\frac{15}{64}$ **.**

ג. עתה בוחרים באקראי שקית (הסתברות לכל שקית היא 0.5),

ומוציאים שתי מטפחות <u>ללא החזרה</u>, כך שמספר המטפחות יורד באחת, בהתאם לצבע המתאים.

$$P(2\text{ red})=0.5\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+0.5\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{17}{55}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{17}{55}$ **.**



נתונים

1. AB **משיק למעגל בנקודה** A .

2. $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADB$.

עבור ב: 3. $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta AED}} = 4$

עבור ג: 4. $AD = a$

צ"ל: א. $\Delta AED \sim \Delta BAD$.

ב. $\frac{P_{\Delta BAD}}{P_{\Delta AED}}$.

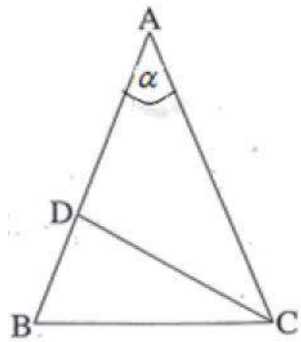
ג. (1) BD **(2)** $\frac{BD}{DE}$

הסבר		טענה	נימוק
1	5	AB **משיק למעגל בנקודה** A	נתון
5	6	$\sphericalangle EAD = \sphericalangle ABD$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
2	7	$\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADB$ (ז)	נתון
7 ,6	8	$\Delta AED \sim \Delta BAD$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
3	9	$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta AED}} = 4$	נתון
9 ,8	10	$\frac{AE}{BA} = \frac{AD}{BD} = \frac{ED}{AD} = 2$	יחס דמיון של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
10 ,8	11	$\frac{P_{\Delta BAD}}{P_{\Delta AED}} = 2$	יחס היקפים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון
		מ.ש.ל. ב	
4	12	$AD = a$	נתון
12 ,10	13	$BD = 2a$ **מ.ש.ל ג (1)**	הצבה וחישוב
12 ,10	14	$ED = \frac{1}{2}a$	הצבה וחישוב
14 ,13	15	$\frac{BD}{DE} = 4$	חישוב
		מ.ש.ל. ג (2)	

א. $\sphericalangle BAC = \alpha$ **(נתון).**

12.5 **סמ"ר** $= S_{\Delta ABC}$ **(נתון).**

$AB = AC$ **(נתון) .**



$$12.5 = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle BAC}{2}$$

$$12.5 = \frac{(AB)^2 \sin\alpha}{2} \quad / \cdot \frac{2}{\sin\alpha} > 0$$

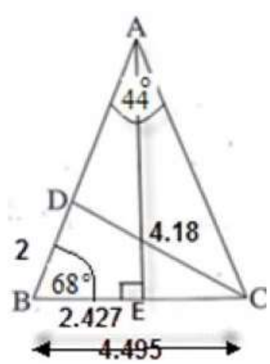
$$\frac{25}{\sin\alpha} = (AB)^2$$

$$\boxed{AB = \frac{5}{\sqrt{\sin\alpha}}} \quad \leftarrow AB > 0$$

תשובה: אורך השוק של המשולש ABC **הוא** $\frac{5}{\sqrt{\sin\alpha}}$.

ב. $AE \perp BC$ **(בניית עזר) ולכן** $BE = EC$ **(הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון).**

$\alpha = 44°$ **(נתון) ,** 2 **ס"מ** $= BD$ **.**



$$\sphericalangle B = \sphericalangle ACB = \frac{180° - 44°}{2} = 68°$$

$\underline{\Delta ABE}$

$$\cos 68° = \frac{BE}{AB}$$

$$\frac{5\cos 68°}{\sqrt{\sin 44°}} = BE$$

$$\boxed{BE = 2.247\,cm}$$

$$\boxed{BC = 4.495\,cm}$$

$\underline{\Delta BCD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(DC)^2 = (BD)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot BD \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle B$$

$$(DC)^2 = 2^2 + 4.495^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4.495 \cdot \cos 68°$$

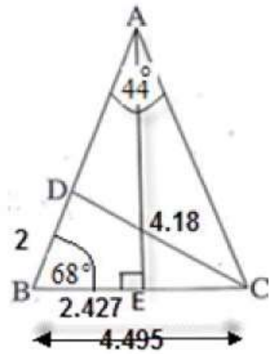
$$(DC)^2 = 17.47$$

$$\boxed{DC = 4.18\,cm}$$

תשובה: 4.18 **ס"מ** $= DC$ **.**

ג. כיוון ש- $DC > BD$ **, הרי שבמשפט הסינוסים, ב** ΔBCD , **נקבל פתרון יחיד אפשרי ל-** $\sphericalangle BCD$ **.**

בתרגיל זה, אין כלל בעיה כי $\sphericalangle BCD$ **חדה.**



$\underline{\Delta BCD}$ **לפי משפט הסינוסים:**

$$\frac{DC}{\sin 68°} = \frac{BD}{\sin\sphericalangle BCD}$$

$$\sin\sphericalangle BCD = \frac{2\cdot\sin 68°}{4.18}$$

$$\sin\sphericalangle BCD = 0.4437$$

$$\boxed{\sphericalangle BCD = 26.34°} \quad \leftarrow 0° < \sphericalangle BCD < 68°$$

תשובה: $\sphericalangle BCD = 26.34°$ **.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2-x}$.

תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

$$x^2-x\neq 0$$
$$x(x-1)\neq 0$$

תשובה: $x\neq 0, x\neq 1$.

(2) יש הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה).

$f(100)=0.0002\to 0,\quad f(-100)=0.002\to 0,$ **, מסקנה:** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

$f(0.001)=-2002\to -\infty,\quad f(-0.001)=1998\to +\infty,$ **, מסקנה:** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

$f(1.001)=1998\to +\infty,\quad f(0.999)=-2002\to -\infty,$ **, מסקנה:** $x=1$ **אסימפטוטה אנכית.**

נימוקים אפשריים נוספים:

הביטוי $\frac{2}{x^2-x}$ **שואף ל-** 0**, כאשר** x **שואף ל-** $\pm\infty$**, כי חזקת המכנה (** 2 **) גדולה מחזקת המונה (** 0 **),**

$x=0,\quad x=1$ **מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים** $x=0,\quad x=1$ **אסימפטוטות אנכיות.**

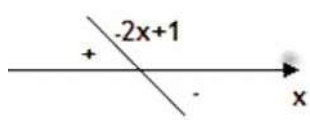
תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** y **,** $x=0,\quad x=1$ **אסימפטוטות מאונכות לציר ה-** x .

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{0-2(2x-1)}{(x^2-x)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(-2x+1)}{(x^2-x)^2}}$$

$$2x-1=0$$
$$x=0.5$$

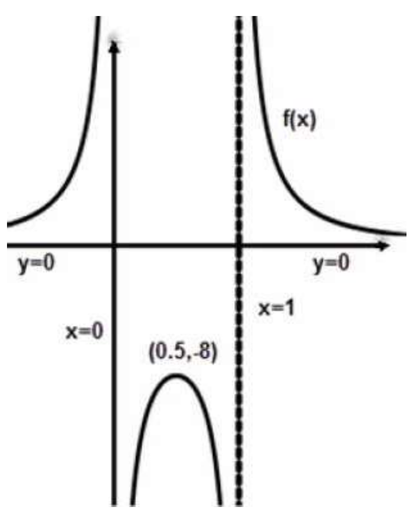


המכנה חיובי, כאשר המונה גרף של קו ישר יורד, העובר מחיוביות לשליליות, עבור $x=0.5$ **ולכן מקסימום.**

ומכאן גם שהפונקציה יורדת עבור $x>1$ **או** $0.5<x<1$ **ועולה עבור** $0<x<0.5$ **או** $x<0$.

תשובה: $(0.5,-8)$ **, מקסימום.**

(4) הסרטוט המתאים:



ב. $g(x)=f(x)-2$ **תזוזה אנכית של** $f(x)$ **כלפי מטה ב-** 2 **יחידות.**

(1) תחום ההגדרה אינו משתנה והאסימפטוטות המאונכות לציר ה- x **אינן משתנות.**

התזוזה כלפי מטה ב- 2 **יחידות של גרף הפונקציה**

מורידה גם את האסימפטוטה האופקית ב- 2 **יחידות כלפי מטה.**

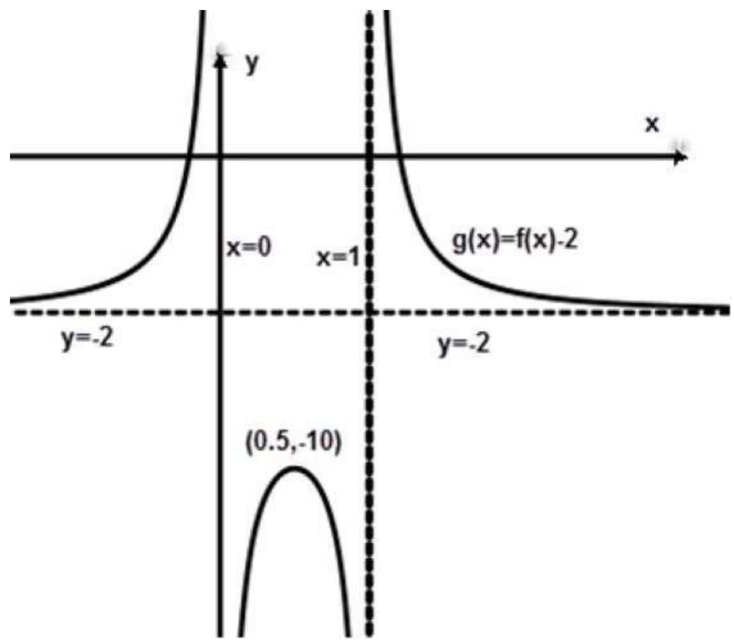
תשובה: $y=-2$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** y **,** $x=1$, $x=0,$ **אסימפטוטות מאונכות לציר ה-** x **.**

(2) התזוזה כלפי מטה ב- 2 **יחידות של גרף הפונקציה**

מורידה גם את נקודת הקיצון ב- 2 **יחידות כלפי מטה, אך לא את סוגה.**

תשובה: $(0.5,-10)$, **מקסימום .**

(3) הסרטוט המתאים:



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$.

(1) הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי שלילי, והמכנה צ"ל שונה מאפס, לכן $x>0$.

תשובה: $x>0$.

(2) $x=0$ **לא בתחום ההגדרה של הפונקציה, לכן אין חיתוך עם ציר ה-** y .

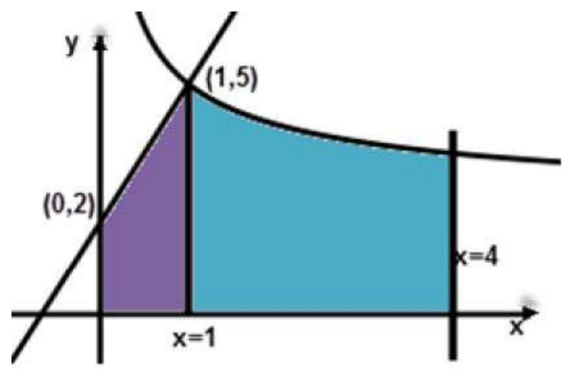
הביטוי $\frac{3}{\sqrt{x}}$ **הוא חיובי ואם נוסיף** 2 **נקבל שהפונקציה חיובית לכל** $x>0$ **, ואין חיתוך עם ציר ה-** x .

למעשה $\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ **שואף ל-** $0+2$ **, בכיוון החיובי של ציר ה-** x **, ולכן** $y=2$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: גרף הפונקציה אינו חותך את הצירים.

(3) הסרטוט המתאים, כולל עבור ב (1).

הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ **יורדת (הובא כנתון).**



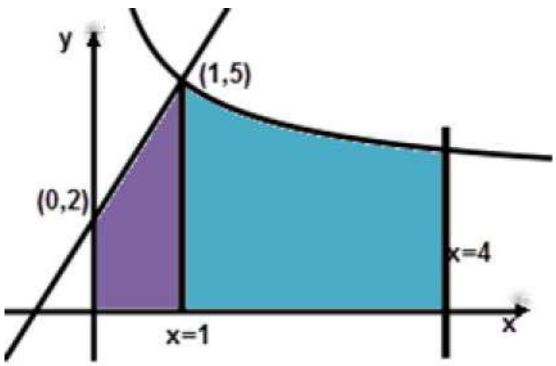
ב. (1) הסרטוט משמאל ובעמוד הקודם

(2) נמצא את נקודת החיתוך שבין הישר $y=3x+2$ **לפונקציה** $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ **.**

$$\frac{3}{\sqrt{x}}+2=3x+2$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}}=3x \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=x \quad (\ )^2$$

$$\frac{1}{x}=x^2 \quad \rightarrow \quad 1=x^3 \quad \rightarrow 1=x \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}=1 \quad \rightarrow 1=1\ o.k.$$



ושיעורי נקודת החיתוך הם: $(1,5)$ **לפונקציה.**

הישר $y=3x+2$ **חותך את ציר ה-** y **בנקודה** $(0,2)$ **ועולה.**

הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ **יורדת (הובא כנתון).**

נחשב את השטח שבין הפונקציה, הצירים ושני הישרים,

על ידי חישוב שטח ימני בעזרת אינטגרל, ושמאלי כשטח טרפז.

$S_{trapez}=\frac{(2+5)\cdot(1-0)}{2}=3.5$ **.**

את השטח הימני נחשב בעזרת אינטגרל.

$$S=\int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}}+2-0\right)dx$$

$$S=3\cdot 2\sqrt{x}+2x\Big]_1^4$$

$$S=(6\cdot\sqrt{4}+2\cdot 4)-(6\cdot\sqrt{1}+2\cdot 1)$$

$$S=(20)-(8)$$

$$\boxed{S=12}$$

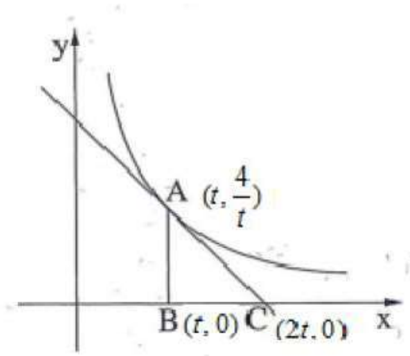
וגודל השטח כולו: $3.5+12=15.5$

תשובה: השטח הוא 15.5 **יח"ר.**

א. נסמן ב- t **את שיעור ה-** x **של הנקודה** A **, הנמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=\frac{4}{x}$ **.**

בהתאם שיעורי הנקודה הם $\mathrm{A}(t,\frac{4}{t})$ **.**

(1) נמצא את שיפוע המשיק בנקודה $\mathrm{A}(t,\frac{4}{t})$ **.**



$$\boxed{f'(x)=-\frac{4}{x^2}}$$

$$\boxed{m(t)=f'(t)=-\frac{4}{t^2}}$$

תשובה: שיפוע המשיק הוא $-\frac{4}{t^2}$ **.**

(2) נמצא את משוואת המשיק בנקודה $\mathrm{A}(t,\frac{4}{t})$ **.**

$$y-\frac{4}{t}=-\frac{4}{t^2}(x-t)$$

$$y-\frac{4}{t}=-\frac{4}{t^2}x+\frac{4}{t}$$

$$\boxed{y=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x **.**

$$0=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}\quad\rightarrow 0=-4x+8t\quad\rightarrow x=2t\quad\rightarrow \mathrm{C}(2t,0)$$

שיעורי הנקודה B **הם** $(t,0)$ **, כי** $x_{\mathrm{B}}=x_{\mathrm{A}}=t$ **.**

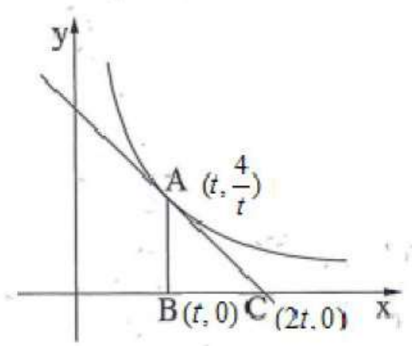
לכן $\mathrm{BC}=x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{B}}=2t-t=t$

תשובה: $\mathrm{BC}=t$ **.**

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *סכום הקטעים* $AB+BC$.

$$AB = y_A - y_B = \frac{4}{t} - 0 = \frac{4}{t}$$

כלומר: $\boxed{g(t) = t + \frac{4}{t}}$



נמצא את נקודת הקיצון

$$g'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$$

$$\boxed{g'(t) = \frac{t^2-4}{t^2}}$$

$$0 = \frac{t^2-4}{t^2}$$

$$0 = t^2 - 4 \quad \to t^2 = 4 \quad \to t = \pm 2$$

$t=-2$ **נפסל כי נתון שהגרף ברביע הראשון.**

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$g'(1) = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

$$g'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$$

x		2		0
y'	+		-	
מסקנה	↗	**Min**	↘	

הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.

(בהתאם שיעורי הנקודה $A(1,4)$ **)**

תשובה: $t=2$ **יביא את סכום הקטעים** $AB+BC$ **למינימום.**