נסמן : x **- מספר המוצרים שהסוחר קנה.**

y **- מחיר קנייה (שקלים) של כל אחד מן המוצרים.**

	כמות (מספר מוצרים)	מחיר למוצר (שקלים)	סך הכול (שקלים)
קניית המוצרים	x	y	xy
מכירת 10%	$10\%\cdot x=0.1x$	40	$40\cdot 0.1x=4x$
נשארו במחסן	20	-	-
שאר המוצרים	$x-0.1x-20=0.9x-20$	$\frac{100+60}{100}\cdot y=1.6y$	$1.6y\cdot(0.9x-20)$

הסוחר שילם עבור כול המוצרים $6,000$ **שקלים. המשוואה המתאימה** $xy=6000$ **.**

הכנסת הסוחר הייתה $7,520$ **שקלים. המשוואה המתאימה** $4x+1.6y\cdot(0.9x-20)=7520$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} xy=6000 \quad \rightarrow \boxed{y=\frac{6000}{x}} \\ 4x+1.6y\cdot(0.9x-20)=7520 \end{cases}$$

$$4x+1.6\cdot\frac{6000\cdot(0.9x-20)}{x}=7520$$

$$4x+\frac{9600\cdot(0.9x-20)}{x}=7520 \quad /\cdot x$$

$$4x^2+9600\cdot(0.9x-20)=7520x$$

$$4x^2+8640x-192000=7520x$$

$$4x^2+1120x-192000=0$$

$$\boxed{x=120} \rightarrow y=\frac{6000}{120} \quad \rightarrow \boxed{y=50}$$

$$\cancel{x=-400} \quad \leftarrow x>20$$

תשובה: הסוחר קנה 120 **מוצרים (כל אחד במחיר של** 50 **שקלים).**

ב. הסוחר מכר את 20 **המוצרים שהשאיר במחסן, ברווח של** 200% **.**

$$20\cdot\frac{100+200}{100}\cdot 50=3000$$

תשובה: הכנסתו של הסוחר ממכירת המוצרים האלה הייתה $3,000$ **שקלים.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. משוואת האלכסון BD **היא** $y=-\frac{1}{3}x+3$.

שיעורי הקדקוד B **, שעל ציר ה -** y **הם** $(0,3)$.

שיעורי הקדקוד D **, שעל ציר ה -** x **הם** $(9,0)$ $\leftarrow$ $x=9$ $\leftarrow$ $0=-x+9$ $\leftarrow$ $0=-\frac{1}{3}x+3$.

אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה, ולכן השיפועים הופכים לנגדיים.

$m_{BD}\cdot m_{AC}=-1 \rightarrow m_{BD}=-\frac{1}{3}\rightarrow m_{AC}=+3$.

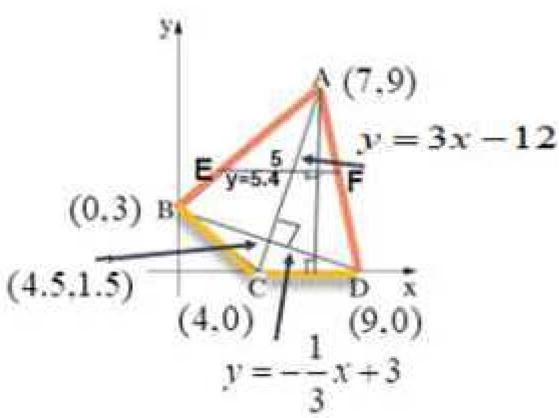
האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני, ולכן מפגש האלכסונים: $(\frac{0+9}{2},\frac{3+0}{2})=(4.5,1.5)$.

משוואת האלכסון AC **, על פי השיפוע והנקודה** $(4.5,1.5)$ **היא:** $y-1.5=3(x-4.5) \quad \rightarrow y=3x-12$.

שיעורי הקדקוד C **, שעל ציר ה -** x **הם** $(4,0)$ $\leftarrow$ $x=4$ $\leftarrow$ $12=3x$ $\leftarrow$ $0=3x-12$.

תשובה: $B(0,3)$, $D(9,0)$, $C(4,0)$.

ב. נחשב את שטח הדלתון ABCD.



$$S_{ABCD}=2S_{ACD}=2\cdot\frac{CD\cdot h_{CD}}{2}=(9-4)\cdot(9-0)=45$$

תשובה: שטח הדלתון הוא 45.

ג. (1) נחשב את שטח משולש AEF.

$$S_{\Delta AEF}=\frac{EF\cdot h_{EF}}{2}=\frac{5\cdot(9-5.4)}{2}=9$$

תשובה: שטח משולש AEF **הוא** 9.

(2) נחשב את שטח המחומש EFDCB.

$$S_{EFDCB}=S_{ABCD}-S_{\Delta AEF}=45-9=36$$

תשובה: שטח המחומש EFDCB **הוא** 36.

א. ישנם ארבעה מספרים הגדולים מ- 2 בקובייה ($3,4,5,6$).

הסיכוי שיתקבל על הקובייה, מספר שגדול מ- 2 , בהטלה אחת של הקובייה, הוא $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

הסיכוי ל"פלי" בהטלת מטבע הוגן, שלו שני צדדים, הוא $\frac{1}{2}$.

(1) ההסתברות ששירה תזכה בפרס היא $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

תשובה: ההסתברות היא $\frac{1}{6}$.

(2) שירה משחקת במשחק 4 פעמים.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=4$, $p=\frac{1}{6}$, $k=2$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_4(2)=\binom{4}{2}\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(1-\frac{1}{6})^{4-2}=6\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^2=\frac{25}{216}$$

תשובה: ההסתברות ששירה תזכה ב-2 פרסים בדיוק היא $\frac{25}{216}$.

ב. (1) בהטלת שתי קוביות משחק הוגנות ישנן 36 אפשרויות, שוות הסתברות.

ברבות מהן סכום המספרים יהיה קטן מ- 10 .

ב- 6 האפשרויות הבאות, סכום המספרים יהיה גדול, או שווה, ל- 10:

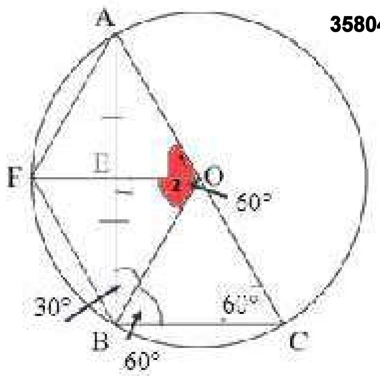
$(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)$.

לכן, ישנן 30 אפשרויות לסכום שקטן מ-10, וההסתברות היא $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

תשובה: ההסתברות, שבזריקת הקובייה פעמיים סכום המספרים יהיה קטן מ- 10, היא $\frac{5}{6}$.

(2) אביגיל תזכה בפרס, אם סכום המספרים יהיה קטן מ-10 והמטבע יפול על "עץ" - $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$.

תשובה: ההסתברות שאביגיל תזכה בפרס היא $\frac{5}{12}$.



נתונים

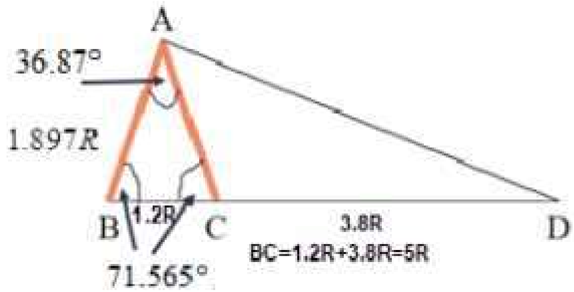
1. O **מרכז המעגל** **2.** $OE \perp AB$ **עבור ג. 3.** $\sphericalangle ACB = 60°$

צ"ל: א. OE **קטע אמצעים ב-** ΔABC

ב. ΔAFB **שווה שוקיים.**

ג. FOCB **מעוין**

הסבר		טענה	נימוק
1	4	O מרכז המעגל	נתון
4	5	$AO = OC$	רדיוסים שווים במעגל
4	6	$\sphericalangle ABC = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
2	7	$\sphericalangle AEO = \sphericalangle BEO = 90°$	נתון
6,7	8	$ED \parallel BC$	שני ישרים, המאונכים לישר שלישי, מקבילים
8 ,5	9	OE קטע אמצעים ב- ΔABC	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול
			מ.ש.ל. א
4, ד7	10	$\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$	ישר שעובר במרכז המעגל ומאונך למיתר חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר
10	11	ΔAFB שווה שוקיים	על זוויות מרכזיות שוות נשענים מיתרים שווים
			מ.ש.ל. ב
3	12	$\sphericalangle ACB = 60°$	נתון
4	13	$OC = OB = OF$	רדיוסים שווים במעגל
13 ,12	14	$\sphericalangle OBC = 60°$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔOBC
14 ,13	15	ΔOBC שווה צלעות	משולש שווה שוקיים עם זווית $60°$
15	16	$OC = OB = BC$	צלעות שוות במש"ץ
16 ,8	17	$\sphericalangle O_2 = 60°$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
17 ,713	18	ΔOFB שווה צלעות	משולש שווה שוקיים עם זווית $60°$
18	19	$OF = OB = BF$	צלעות שוות במש"ץ
19 ,16	20	$OF = OC = BF = BC$	כלל המעבר
20	21	FOCB מעוין	ארבע צלעות שוות
			מ.ש.ל. ג



א. ΔABC **שווה שוקיים (וחד זווית),**

R **רדיוס המעגל החוסם אותו.**

(1) נחשב את זוויות המשולש ABC **.**

ΔABC **על פי משפט הסינוסים:**

$$\frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC}=2R$$

$$\frac{1.2R}{2R}=\sin\sphericalangle BAC$$

$$\sphericalangle BAC=36.87^\circ \quad \leftarrow \sphericalangle BAC>90^\circ$$

זוויות הבסיס שוות, לכן: $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ABC=\dfrac{180^\circ-36.87^\circ}{2}=71.565^\circ$ **.**

תשובה: $\sphericalangle BAC=36.87^\circ$, $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ABC=71.565^\circ$ **.**

(2) ΔABC **על פי משפט הסינוסים:**

$$\frac{AB}{\sin 71.565^\circ}=2R$$

$$AB=2R\sin 71.565^\circ$$

$$\boxed{AB=1.897R}$$

תשובה: $AB=1.897R$ **.**

ב. ΔABD **על פי משפט הקוסינוסים:**

$$(AD)^2=(AB)^2+(BD)^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\sphericalangle B$$

$$(AD)^2=(1.897R)^2+(5R)^2-2\cdot 1.897R\cdot 5R\cdot\cos 71.565^\circ$$

$$(AD)^2=22.6R^2$$

$$\boxed{AD=4.754R}$$

תשובה: $AD=4.754R$ **.**

ג. AE **גובה חיצוני ב-** ΔACD **,**

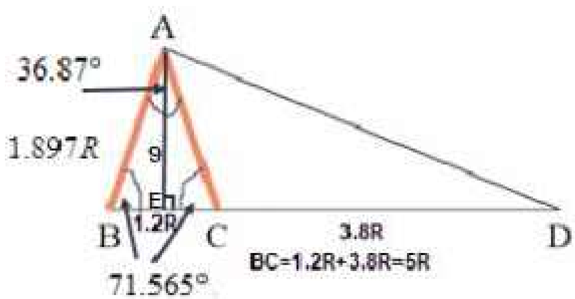
ולכן גובה לבסיס ב- ΔABC **וגם תיכון.**

$$BE=\frac{1.2R}{2}=0.6R$$

$$\tan 71.565^\circ=\frac{AE}{BE}=\frac{9}{0.6R}$$

$$R=\frac{9}{0.6\tan 71.565^\circ}=5$$

תשובה: $R=5$ **.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{(x-1)^2}+a$ **(** a **פרמטר).**

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס. לכן, $(x-1)^2\neq 0 \quad \to x-1\neq 0 \quad \to \boxed{x\neq 1}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 1$ **.**

(2) במחובר השמאלי: חזקת המונה (1**) קטנה מחזקת המכנה (**2**), ולכן** $\frac{4x}{(x-1)^2}\to 0$ **עבור** $x\to\pm\infty$ **.**

מכאן ש- $y=0+a=a$ **אסימפטוטה אופקית.**

אסימפטוטה אנכית: $x=1$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=1$ **אסימפטוטה אנכית.**

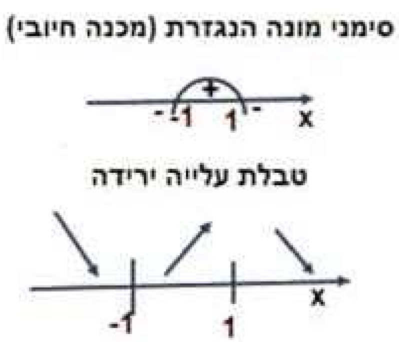
תשובה: $y=a$ **,** $x=1$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון, ואת סוגן.

$$f'(x)=\frac{4(x-1)^2-4x\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{4(x-1)\left[x-1-2x\right]}{(x-1)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4(x-1)(-x-1)}{(x-1)^4}}$$



מכנה הנגזרת חיובי.

המונה מיוצג על ידי פרבולה הפוכה ("בוכה").

המונה מתאפס עבור $x=1$ **שלא בתחום ההגדרה,**

ועבור $x=-1$ **, נקבל** $y=\frac{4(-1)}{(-1-1)^2}+a=a-1$ **, מינימום.**

תשובה: $(-1,a-1)$ **מינימום.**

(4) תשובה: עלייה: $-1<x<1$ **, ירידה:** $x>1$ **או** $x<-1$ **.**

ב. נתון שלפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y=-3$**, כאשר מצאנו כי האסימפטוטה האופקית היא** $y=a$ **.**

תשובה: $a=-3$ **.**

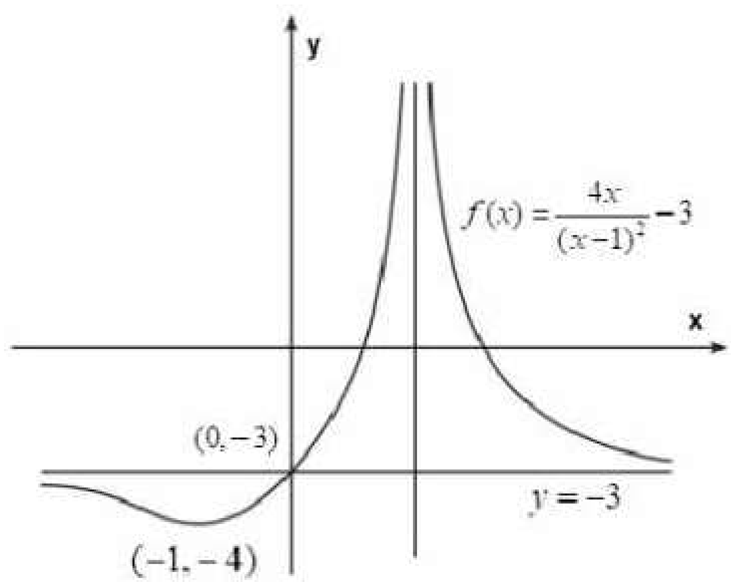
ג. נציב $a=-3$ **בתבנית הפונקציה ונקבל** $f(x)=\frac{4x}{(x-1)^2}-3$ **.**

(1) $f(0)=\frac{4\cdot 0}{(0-1)^2}-3=-3$ **.**

תשובה: נקודת החיתוך עם ציר ה- y **היא** $(0,-3)$**.**

(2) סקיצה של $f(x)$ **.**

שיעורי נקודת המינימום הם: $(-1,-4)\;\leftarrow\;(-1,-3-1)$**.**



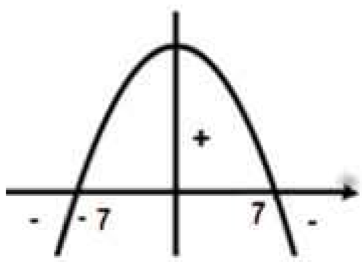
ד הישר $y=k$ **(פונקציה קבועה) חותך את גרף הפונקציה** $f(x)$ **בנקודה אחת בדיוק,**

כאשר הוא האסימפטוטה האופקית וחותך את גרף הפונקציה בנקודה $(0,-3)$**,**

או כאשר הוא עובר בנקודת המינימום המוחלט $(-1,-4)$ **.**

תשובה: $k=-3$**, או** $k=-4$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{49-x^2}$.



(1) הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$$49-x^2 \ge 0$$
$$49-x^2 = 0$$
$$x=7, \quad x=-7$$

הביטוי שבתוך השורש מיוצג על ידי פרבולה הפוכה

(בעלת מקסימום, "עצובה"),

ובהתאם לתחום בו היא אי-שלילית נמצא את תחום ההגדרה.

תשובה: תחום ההגדרה: $-7 \le x \le 7$.

(2) נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

נשים לב ש: $(7,0)$ **,** $(-7,0)$ **תהייה נקודות קיצון בקצה.**

$$f'(x)=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{49-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{49-x^2}}}$$

$$-x=0$$

$$x=0 \quad \to y=\sqrt{49-0^2}=7 \quad \to (0,7)$$

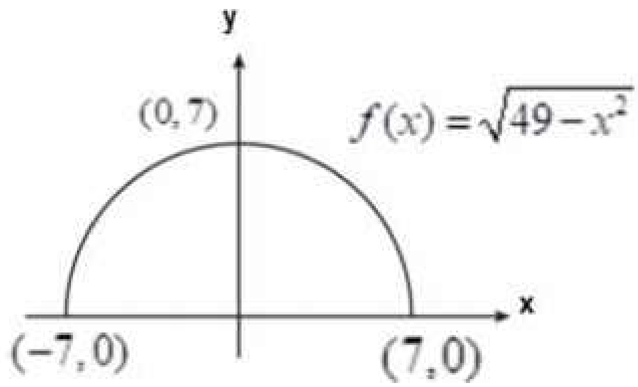
נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה , המבוססת על ערכי הפונקציה.

(את סימני הנגזרת, הוספתי עבור סעיף ב. (תחומי עלייה וירידה נקבעו כבר לפי ערכי הפונקציה.)

x	-7		0		7
$f(x)$	0		7		0
$f'(x)$		+	0	-	
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(7,0)$ **מינימום ,** $(0,7)$ **מקסימום ,** $(-7,0)$ **מינימום.**

(3) נסרטט סקיצה .



ב. $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{49-x^2}}$.

(1) $x=\pm7$ **מאפס את מכנה הנגזרת (ולא את המונה) ולכן הישרים** $x=\pm7$ **אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: $x=7$ **,** $x=-7$.

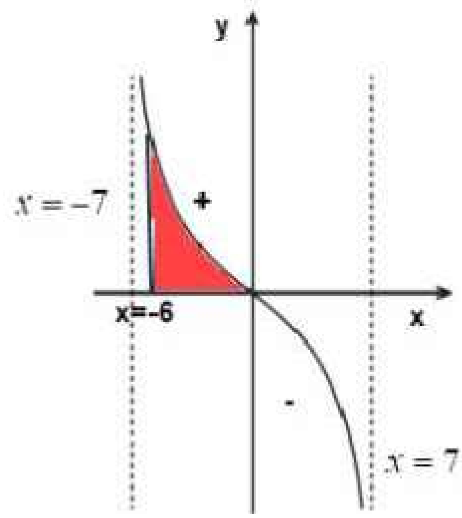
(2) תחומי חיוביות ושליליות של $f'(x)$ **תואמים את תחומי העלייה והירידה של** $f(x)$ **ורשומים בטבלה.**

תשובה: חיוביות $-7<x<0$ **, שליליות** $0<x<7$.

(3) $f'(0)=0$ **ולכן גרף הנגזרת עובר בראשית הצירים.**

בסקיצה מסומנים סימני חיוביות ושליליות, על-מנת להסביר כיצד צויר גרף הנגזרת.

בנוסף, מסומן השטח המבוקש עבור סעיף ג.



ג. נחשב את השטח המבוקש, צבוע באדום בסקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

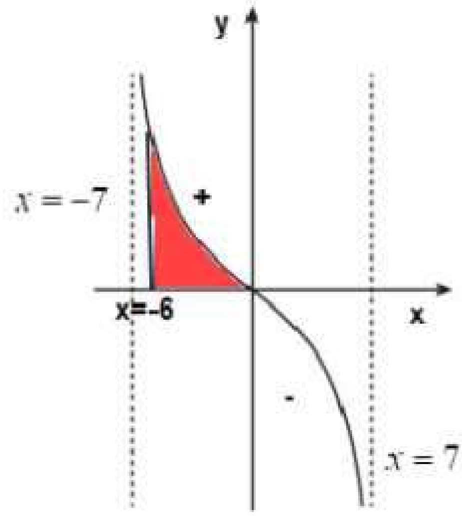
$$S=\int_{-6}^{0}(f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_{-6}^{0}$$

$$x=0:\quad f(0)=7$$

$$x=-6:\quad f(-6)=\sqrt{49-(-6)^2}=\sqrt{13}$$

$$\boxed{S=7-\sqrt{13}=3.39}$$

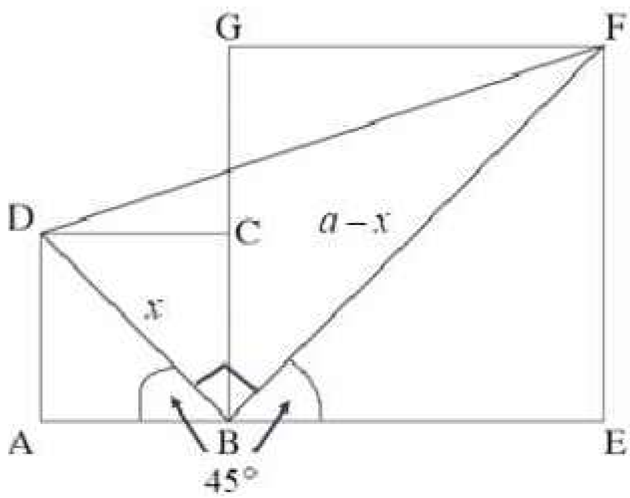
תשובה: השטח הוא $7-\sqrt{13}=3.39$ **יח"ר.**



8

א. הפונקציה שיש להביא ***למינימום***

היא ***אורך הקטע*** DF.



נסמן $DB = x$. **נתון** $DB + BF = a$,

ובהתאם $BF = a - x$. **תחום הגדרה:** $0 < x < a$.

אלכסוני הריבועים חוצים את זוויות הריבועים הישרות,

ולכן $\sphericalangle DBC = \sphericalangle FBG = 45°$.

מכאן ש- $\sphericalangle DBF = 90°$.

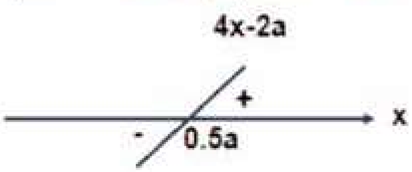
נמצא את DF **באמצעות משפט פיתגורס ב-** ΔDBF.

$$(DF)^2 = (DB)^2 + (BF)^2$$
$$(DF)^2 = x^2 + (a-x)^2$$
$$(DF)^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2$$
$$\boxed{DF = \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}}$$

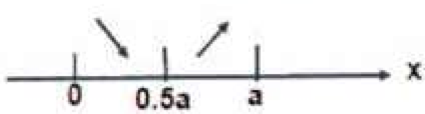
$$\boxed{(DF)' = \frac{4x - 2a}{2\sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}}}$$

$$0 = 4x - 2a$$
$$-4x = -2a$$
$$\boxed{x = 0.5a}$$

סימני הנגזרת(נקבעים ע"י המונה)



טבלת עלייה / ירידה



מכנה הנגזרת חיובי, והביטוי במונה הוא של קו ישר עולה.

עלפי טבלת העלייה והירידה, $x = 0.5a$ **מינימום.**

תשובה: אורך האלכסון $DB = 0.5a$, **עבורו אורך הקטע** DF **הוא מינימלי.**

ב. עבור $DB = 0.5a$ **מתקבל ש-** $BF = a - 0.5a = 0.5a$.

לכן אלכסוני שני הריבועים שווים זה לזה, והריבועים חופפים.

יחס הצלעות המתקבל הוא 1.

תשובה: עבור $DB = 0.5a$, **היחס** $\frac{AB}{BE} = 1$.