א. נסמן : x - מחיר פיצה אישית (שקלים), ובהתאם $3x$ - מחיר פיצה משפחתית (שקלים).

y - מספר פיצות אישיות, שקנו תלמידי שכבה י"א, ובהתאם $2.5y$ מספר פיצות משפחתיות שקנו.

תלמידי השכבה קנו 63 פיצות, והמשוואה המתאימה היא: $y+2.5y=63$ ומכאן ש- $y=18$.

כלומר הם קנו 18 פיצות אישיות, ו- 45 פיצות משפחתיות.

	כמות (מספר מוצרים)	מחיר למוצר (שקלים)	סך הכול (שקלים)
10% הנחה על פיצה אישית	18	$90\%\cdot x=0.9x$	$18\cdot 0.9x=16.2x$
20% הנחה על פיצה משפחתית	45	$80\%\cdot 3x=2.4x$	$45\cdot 2.4x=108x$

תלמידי שכבה י"א שילמו על הפיצות $3,477.6$ שקלים. המשוואה המתאימה $16.2x+108x=3477.6$.

נפתור את המשוואה:

$$16.2x+108x=3477.6$$
$$124.2x=3477.6 \quad /:124.2$$
$$\boxed{x=28}\rightarrow\boxed{3x=84}$$

תשובה: המחיר המקורי של פיצה אישית הוא 28 שקלים, והמחיר של פיצה משפחתית הוא 84 שקלים.

ב. במסגרת המבצע ניתן לקבל שלוש פיצות אישיות,

כאשר משלמים על שתי פיצות בלבד, כלומר תמורת 56 שקלים $=28\cdot 2$ נקבל שלוש פיצות .

ותמורת $1,232$ שקלים, נקבל 66 פיצות אישיות $=\frac{1232}{56}\cdot 3$

תשובה: במבצע הזה אפשר לקנות 66 פיצות אישיות, תמורת $1,232$ שקלים.

א. נמצא את שיפוע המשיק OB.

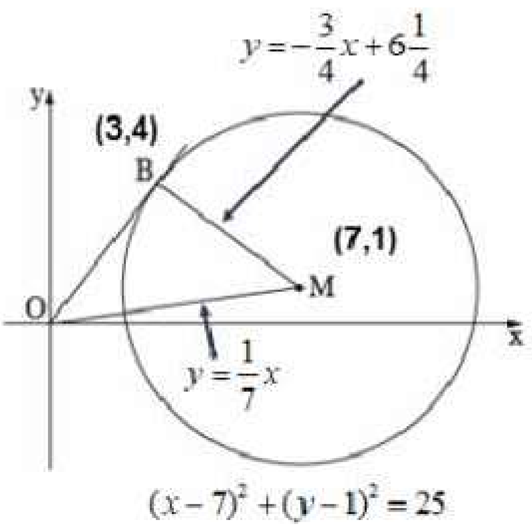
$m_{OB}=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$.

הרדיוס BM **מאונך למשיק, בנקודת ההשקה, ובהתאם לתנאי ניצבות** $m_1\cdot m_2=-1$ **, נקבל** $m_{BM}=-\frac{3}{4}$.

נמצא את משוואת הישר, הרדיוס BM.

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$
$$y-4=-\frac{3}{4}x+2\frac{1}{4}$$
$$\boxed{y=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4}}$$

תשובה: משוואת הישר BM **היא** $y=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4}$.



ב. נמצא את מרכז המעגל.

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{7}x \end{cases}$$

$$\frac{1}{7}x=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4}$$.
$$\frac{25}{28}x=6\frac{1}{4}$$
$$x=7 \quad \rightarrow y=\frac{1}{7}\cdot 7=1 \quad \rightarrow M(7,1)$$

נמצא את רדיוס המעגל.

$R=d_{BM}=\sqrt{(7-3)^2+(1-4)^2}=5$.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-7)^2+(y-1)^2=25$.

ב. BC **הוא קוטר במעגל, כאשר** OM **תיכון לקוטר, המחלק את** $\Delta\mathrm{OBC}$ **המשולש לשני משולשים שווי שטח.**

$d_{\mathrm{OB}}=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$ **.**

$$S_{\Delta\mathrm{OBM}}=\frac{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BM}}{2}=\frac{5\cdot5}{2}=12.5$$

$$S_{\Delta\mathrm{OBC}}=2\cdot S_{\Delta\mathrm{OBM}}=2\cdot12.5$$

$$\boxed{S_{\Delta\mathrm{OBC}}=25}$$

תשובה: $S_{\Delta\mathrm{OBC}}=25$ **.**

ד. אורכו של קוטר המעגל החדש הוא הוא $d_{\mathrm{OM}}=\sqrt{(7-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{50}$ **ולכן אורך הרדיוס** $\frac{\sqrt{50}}{2}$**.**

רדיוס המעגל הנתון: $5>\frac{\sqrt{50}}{2}\approx3.54$

תשובה: מרכז המעגל הנוסף נמצא בתוך המעגל שמרכזו M **.**

א. נסמן ב- $p(\mathrm{A}) = 8\% = 0.08$ **את ההסתברות שלחבר המועדון יש חגורה שחורה.**

נבחרו באקראי 6 **מן החברים שבמועדון.**

(1) יש למצוא את ההסתברות שבדיוק ל- 2 **מהם יש חגורה שחורה.**

זו התפלגות בינומית, כאשר $n = 6$ **,** $p = 0.08$ **,** $k = 2$**.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P_n(k) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$ **,**

$$\mathrm{P}_6(2) = \binom{6}{2}(0.08)^2(1-0.08)^{6-2}$$

$$\mathrm{P}_6(2) = \frac{6!}{2!(6-2)!}\cdot 0.08^2 \cdot 0.92^4$$

$$\mathrm{P}_6(2) = 15\cdot 0.08^2 \cdot 0.92^4$$

$$\boxed{\mathrm{P}_6(2) = 0.0688}$$

תשובה: ההסתברות היא 0.0688 **.**

(2) יש למצוא את ההסתברות שאין חגורה שחורה לאף אחד מתוך ה- 6 **שנבחרו,**

כלומר, שלכל ה- 6 **אין חגורה שחורה.**

$p(\overline{\mathrm{A}}) = 92\% = 0.92$ **, ולכן ההסתברות היא** $0.92^6 = 0.6064$ **.**

ניתן גם באמצעות נוסחת ברנולי, כאשר $n = 6$ **,** $p = 0.08$ **,** $k = 0$**.**

$$\mathrm{P}_6(0) = \binom{6}{0}(0.08)^2(1-0.08)^{6-2}$$

$$\mathrm{P}_6(0) = \frac{6!}{0!(6-0)!}\cdot 0.08^0 \cdot 0.92^6$$

$$\mathrm{P}_6(0) = 1\cdot 1\cdot 0.92^6$$

$$\boxed{\mathrm{P}_6(0) = 0.6064}$$

תשובה: ההסתברות היא 0.6064 **.**

ב. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- עם חגורה שחורה** $\overline{A}$ **- ללא חגורה שחורה**

B **- חניכים** $\overline{B}$ **- מדריכים**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

$$P(A)=0.08 \quad \to P(\overline{A})=0.92$$

$$P(\overline{B})=\frac{1}{5}=0.2 \quad \to P(B)=0.8$$

$$P(\overline{B}/A)=0.75 \quad \to P(B/A)=0.25$$

$$P(\overline{B}/A)=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}$$

$$0.75=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{0.08}$$

$$P(\overline{B}\cap A)=0.06$$

נציב נתונים בטבלה ונשלים אותה.

	עם חגורה שחורה A	ללא חגורה שחורה $\overline{A}$	
חניכים B	0.02	0.78	0.8
מדריכים $\overline{B}$	0.06	0.14	0.2
	0.08	0.92	1

$$P(A\cap B)=0.02$$

תשובה: ההסתברות שחבר שנבחר באקראי, הוא חניך שיש לו חגורה שחורה, היא 0.02 **.**

ג. נחשב את ההסתברות שחניך, שנבחר מבין חברי המועדון, הוא בעל חגורה שחורה.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.02}{0.8}=\frac{1}{40}$$

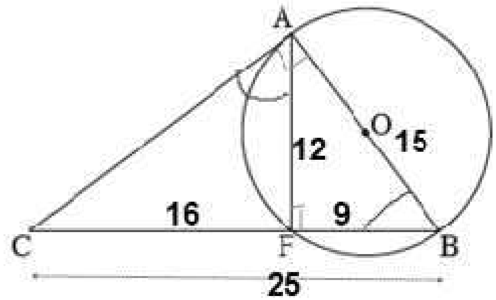
תשובה: ההסתברות היא $\frac{1}{40}$ **.**

נתונים

1. O **מרכז המעגל** **2.** CA **משיק ב-** A.

3. AB **קוטר במעגל.**

עבור ב. 4. 9 **ס"מ** $FB =$ **5.** 16 **ס"מ** $FC =$.



צ"ל: א. $\Delta AFB \sim \Delta CAB$ **. ב.** AB **. ג.** $S_{\Delta CFA}$.

ד. האם $\Delta CFA \sim \Delta CAB$.

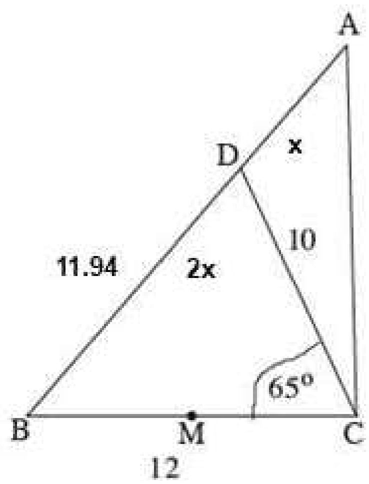
הסבר		טענה	נימוק
3	6	AB קוטר במעגל	נתון
2	7	CA משיק ב- A	נתון
7 ,6	8	$\sphericalangle CAB = 90°$	הקוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה
6	9	$\sphericalangle AFB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא ישרה
9 ,7	10	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle AFB$ (ז)	כלל המעבר
	11	$\sphericalangle B = \sphericalangle B$ (ז)	זווית משותפת
11 ,10	12	$\Delta AFB \sim \Delta CAB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
12	13	$\frac{AF}{CA} = \frac{FB}{AB} = \frac{AB}{CB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
4	14	9 ס"מ $FB =$	נתון
5	15	16 ס"מ $FC =$	נתון
15 ,14	16	25 ס"מ $CB =$	חיבור קטעים
16 ,14 ,13	17	$\frac{9}{AB} = \frac{AB}{25} \rightarrow AB = 15cm$	חישוב
		מ.ש.ל. ב	
17 ,14 ,9	18	$AF = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12cm$	משפט פיתגורס ΔAFB
18 ,15	19	$S_{\Delta CFA} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96cm^2$	נוסחת שטח משולש
		מ.ש.ל. ג	
2	20	$\sphericalangle CAF = \sphericalangle B$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
	21	$\sphericalangle C = \sphericalangle C$ (ז)	זווית משותפת
21 ,20	22	$\Delta CFA \sim \Delta CAB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ד	

א. נחשב את אורך הקטע BD.

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (DC)^2 - 2\cdot BC\cdot DC\cdot \cos 65°$$
$$(BD)^2 = 12^2 + 10^2 - 2\cdot 12\cdot 10\cdot \cos 65°$$
$$(BD)^2 = 142.57$$
$$\boxed{BD = 11.94cm}$$

תשובה: $BD =$ 11.94 **ס"מ** .

ב. נתון ש- $BD = 2DA$.



$$\frac{S_{\Delta BDC}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{0.5\cdot BD\cdot DC\cdot \sin \sphericalangle BDC}{0.5\cdot DA\cdot DC\cdot \sin \sphericalangle ADC} = 2 \quad \leftarrow \sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$$

$$S_{\Delta BDC} = 0.5\cdot BC\cdot DC\cdot \sin \sphericalangle DCB$$
$$S_{\Delta BDC} = 0.5\cdot 12\cdot 10\cdot \sin 65°$$
$$S_{\Delta BDC} = 54.37cm^2$$
$$S_{\Delta ADC} = \frac{54.37}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta ADC} = 27.19cm^2}$$

תשובה: $S_{\Delta ADC} =$ 27.19 **סמ"ר** .

ג. נבדוק האם מתקיים משפט פיתגורס ב- ΔBDC ,

כי אם $\sphericalangle BDC = 90°$ **אז מרכז מעגל חוסם יהיה באמצע היתר** BC **, כלומר בנקודה** M .

$$(BC)^2 \overset{?}{=} (BD)^2 + (DC)^2$$
$$12^2 \overset{?}{=} 11.94^2 + 10^2$$
$$144 \neq 103.76$$
$$\sphericalangle BDC \neq 90°$$

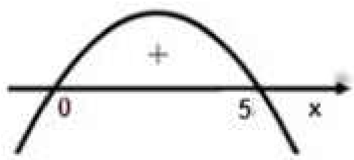
תשובה: הנקודה M **אינה מרכז המעגל החוסם את** ΔBDC .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-2+\sqrt{-x^2+5x}$

הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$-x^2+5x\ge 0$

$x=0, x=5$



מתקבל ביטוי שהגרף שלו הוא פרבולה הפוכה (בוכה).

תשובה: תחום ההגדרה: $0\le x\le 5$ **.**

ב. בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים:** $y=0$ **.**

$0=-2+\sqrt{-x^2+5x}$

$2=\sqrt{-x^2+5x} \quad (\ \ )^2 \qquad test:\sqrt{-1^2+5\cdot 1}=2 \quad o.k.$

$4=-x^2+5x \qquad test:\sqrt{-4^2+5\cdot 4}=2 \quad o.k.$

$x^2-5x+4=0$

$x=1, \quad x=4$

$\boxed{(1,0)\ \ ,\ \ (4,0)}$

תשובה: $(4,0)\ \ ,\ \ (1,0)$ **.**

ג. נקודות קצה: $(5,-2)$ **,** $(0,-2)$ **.**

$f'(x)=\dfrac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}$

$0=-2x+5$

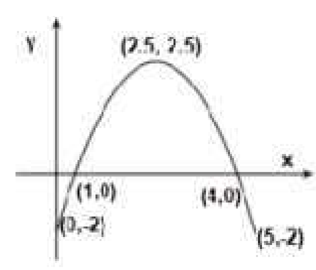
$x=2.5 \quad \rightarrow y=\sqrt{-2.5^2+5\cdot 2.5}=2.5 \quad \rightarrow (2.5,2.5)$

ועל פי ערכי הפונקציה בקצוות ניתן לקבוע את סוגי הקיצון.

תשובה: $(2.5,2.5)$ **מקסימום מוחלט,** $(5,-2)$ **,** $(0,-2)$ **מינימום מוחלט.**

ד. תשובה: ירידה - $2.5<x<5$ **, עלייה -** $0<x<2.5$ **.**

ה. הסקיצה המתאימה.

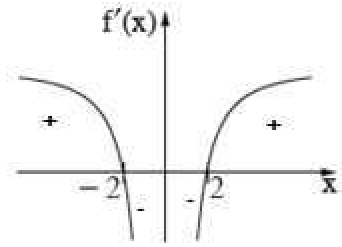


ד. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ **, תזוזה אנכית כלפי מעלה של** c **יחידות.**

עבור $c>2$ **, הערך המינימלי של הפונקציה** $g(x)$ **יהיה גדול מ-** 0 **, כלומר** $g(x)$ **תהיה חיובית**

תשובה: עבור $c>2$ **,** $g(x)$ **תהיה חיובית בתחום הגדרתה, שהוא גם** $0\le x\le 5$ **.**

א. נתון גרף הנגזרת $f'(x)$, שבדומה ל- $f(x)$, מוגדרת עבור $x \neq 0$.



עבור $x=-2$: $f'(x)$ עוברת מחיוביות לשליות, ובהתאם $f(x)$ מעלייה לירידה, ומתקבל ש- $x=-2$ מקסימום.

עבור $x=2$: $f'(x)$ עוברת משליליות לחיוביות, ובהתאם $f(x)$ מירידה לעלייה, ומתקבל ש- $x=2$ מינימום.

תשובה: $x=-2$ מקסימום , $x=2$ מינימום.

ב. נתון $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+a$, לכל $x \neq 0$.

על פי הציור $f'(2)=0$.

$$-\frac{1}{2^2}+a=0$$

$$\boxed{a=\frac{1}{4}}$$

תשובה: $a=\frac{1}{4}$.

ג. עבור $x>0$.

(1) נתון $f(2)=10$, בנקודת המינימום של $f(x)$.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4})\,dx=\int(-x^{-2}+\frac{1}{4})\,dx$$

$$f(x)=-\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{4}x+c=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x+c$$

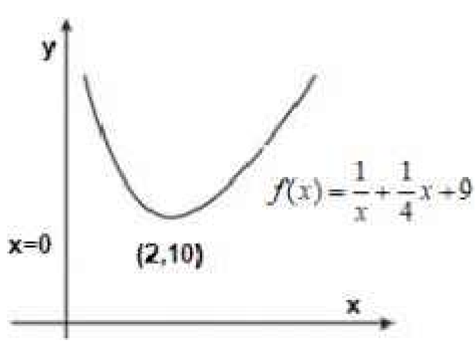
$$10=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+c \quad \leftarrow f(2)=10$$

$$c=9$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x+9}$$

תשובה: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x+9$.

(2) סקיצה של $f(x)$ בתחום $x>0$.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+6x$ **, שהגרף שלה הוא של פרבולה בעלת מקסימום (בוכה),**

שהקדקוד שלו מתקבל עבור $3=-\frac{-6}{2}=-\frac{b}{2a}=x_{kodkod}$.

הצלע השמאלית של המלבן, מתקבלת בתחום עלייה של הפרבולה, שבו $0<x<3$.

הפרבולה חותכת את ציר ה- x **בנקודות** $\mathrm{B}(6,0)$ **ו-** $\mathrm{A}(0,0)$.

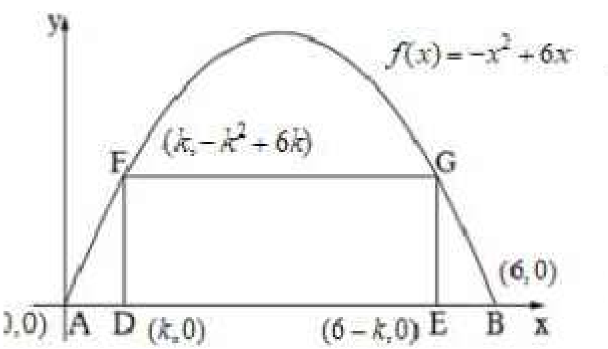
נתון כי $\mathrm{AD}=\mathrm{EB}=k$ **, ובהתאם:** $\mathrm{D}(k,0)$ **,** $\mathrm{F}(k,-k^2+6k)$ **,** $\mathrm{E}(6-k,0)$.

DE **מונח על ציר ה-** x **, ולכן** $\mathrm{DE}=x_{\mathrm{E}}-x_{\mathrm{D}}=6-k-k=6-2k$.

FD **מקביל לציר ה-** y **, ולכן** $\mathrm{FD}=y_{\mathrm{F}}-y_{\mathrm{D}}=-k^2+6k=-k^2+6k$.

תשובה: אורכי צלעות המלבן: $6-2k$ **ו-** $-k^2+6k$.

ב. הפונקציה שיש להביא ***למקסימום*** **היא** ***שטח המלבן*** DFGE.



$$S_{\mathrm{DFGE}}=\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FD}$$
$$S_{\mathrm{DFGE}}=(6-2k)\cdot(-k^2+6k)$$
$$S_{\mathrm{DFGE}}=-6k^2+36k+2k^3-12k^2$$
$$\boxed{S_{\mathrm{DFGE}}=2k^3-18k^2+36k}$$
$$\boxed{S'=6k^2-36k+36}$$
$$0=6k^2-36k+36$$
$$\boxed{k=3-\sqrt{3}\approx1.27}\quad\leftarrow 0<k<3$$
$$S'(1)=6>0\,,\,S'(2)=-12<0\quad\rightarrow Max$$

תשובה: $k=3-\sqrt{3}\approx1.27$ **, עבורו שטח המלבן** DFGE **מקסימלי.**