נסמן את צלע הריבוע ב- $2x$ **,**

וכך רדיוס חצי המעגל הבנוי על הצלע AD **שווה ל-** , **כי** AD **הוא קוטר המעגל.**

שטח הריבוע - $4x^2$ **מ"ר** $= (2x)^2$ **.**

שטח עיגול הוא πR^2 **. כאן מדובר על שטח חצי עיגול, שרדיוסו שווה ל-** x **.**

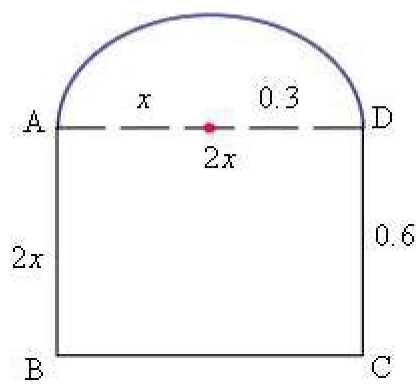
בהתאם, שטח חצי העיגול הוא $0.5\pi x^2$ **מ"ר** $= \dfrac{\pi x^2}{2}$ **.**

נתון ששטח הריבוע גדול ב- 0.2187 **מ"ר משטח חצי העיגול, ויש להציב ב-** $\pi = 3.14$ **.**

המשוואה המתאימה: $4x^2 = 0.5\pi x^2 + 0.2187$

נציב $\pi = 3.14$ **ונפתור את המשוואה.**

$$4x^2 = 0.5 \cdot 3.14x^2 + 0.2187$$
$$4x^2 = 1.57x^2 + 0.2187$$
$$2.43x^2 = 0.2187$$
$$x^2 = 0.09$$
$$\boxed{x = 0.3} \quad \leftarrow x > 0$$



לכן, אורך צלע הריבוע הוא 0.6 **מטר** $= 2 \cdot 0.3$ **.**

היקף מסגרת החלון מורכב משלוש צלעות הריבוע ומחצי היקף העיגול.

סכום שלושת צלעות הריבוע: 1.8 **מטר** $= 3 \cdot 0.6$ **.**

היקף עיגול על פי נוסחה: $2\pi R$ **.**

בהתאם, היקף חצי עיגול, שרדיוסו 0.3 **הוא** $0.3\pi = \dfrac{2\pi \cdot 0.3}{2}$ **.**

נציב $\pi = 3.14$ **ונחשב את ההיקף של המסגרת החיצונית של החלון:** 2.742 **מטר** $= 1.8 + 0.3 \cdot 3.14$

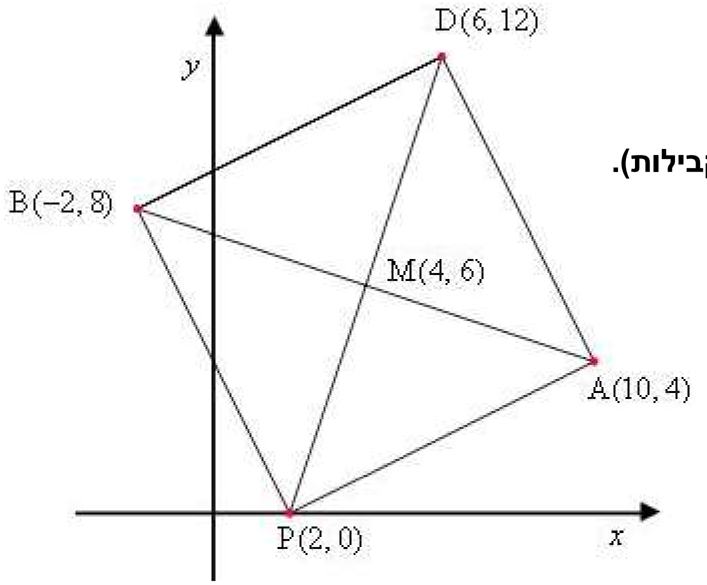
תשובה: היקף מסגרת החלון הוא 2.742 **מטר.**

א. נסמן את שיעורי הנקודה $P(x,0)$, הנמצאת על ציר ה- x .

נתונות הנקודות $A(10,4)$ ו- $B(-2,8)$ וידוע כי $BP=AP$.

$$\sqrt{(8-0)^2+(-2-x)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(10-x)^2}$$
$$64+4+4x+x^2=16+100-20x+x^2$$
$$24x=48$$
$$x=2\quad\rightarrow\boxed{P(2,0)}$$

תשובה: $P(2,0)$



ב. נתון כי במרובע $ADBP$: $BP \parallel AD$ ו- $BD \parallel PA$,

לכן המרובע הוא מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות).

למעשה, המרובע הוא מעוין – כי שתי צלעות סמוכות שוות.

(בהמשך נראה שהוא ריבוע...)

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

$$M\left(\frac{10-2}{2},\frac{4+8}{2}\right)\quad\rightarrow\boxed{M(4,6)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4=\dfrac{2+x_D}{2} & 6=\dfrac{0+y_D}{2} \\ 8=2+x_D & 12=y_D \\ x_D=6 & \end{array}\right\}\boxed{D(6,12)}$$

תשובה: $D(6,12)$.

ג. נמצא את גודלה של זווית D .

במקרה זה היא תהייה ישרה ולכן AB הוא קוטר המעגל.

במקרה אחר, היינו נדרשים למשפט סינוסים על מנת למצוא את רדיוס המעגל החוסם,

או למציאת מרכז המעגל על ידי מפגש בין שני אנכים אמצעיים, ואז מציאת מרחקו מאחד הקדקודים.

$$\left.\begin{array}{l} m_{BD}=\dfrac{12-8}{6+2}=\dfrac{1}{2} \\ m_{AD}=\dfrac{12-4}{6-10}=-2 \end{array}\right\}\rightarrow m_{BD}\cdot m_{AD}=-1\quad\rightarrow\boxed{\sphericalangle D=90^\circ}$$

אורך הקוטר AB : $\sqrt{(10+2)^2+(4-8)^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ **, ולכן הרדיוס הוא** $2\sqrt{10}$.

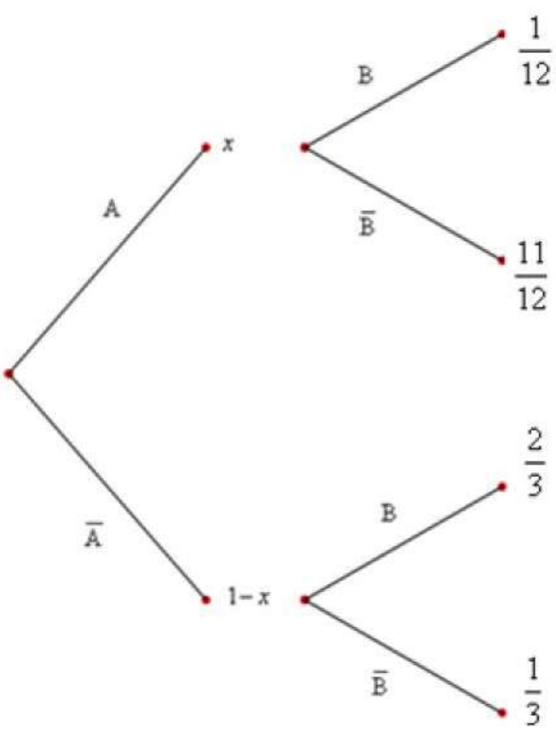
תשובה: אורך הרדיוס הוא $2\sqrt{10}$.

א. (1) נגדיר את המאורעות:

A **- פרחים לבנים** $\overline{A}$ **- פרחים אדומים** B **- ורדים** $\overline{B}$ **- חבצלות**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(B/A)=\frac{1}{12} \quad \rightarrow P(\overline{B}/A)=\frac{11}{12}$$
$$P(B/\overline{A})=\frac{2}{3} \quad \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{3}$$
$$P(B)=0.25 \quad \rightarrow P(\overline{B})=0.75$$



נוח להשתמש בעץ אפשרויות, כאשר אלו הנתונים

נסמן $P(A)=x \quad \rightarrow P(\overline{A})=1-x$

ננצל את הנתון שלא בא לידי ביטוי בעץ - $P(B)=0.25$

$$0.25=x\cdot\frac{1}{12}+(1-x)\cdot\frac{2}{3}$$
$$0.25=\frac{x}{12}+\frac{2(1-x)}{3} \quad /\cdot 12$$
$$3=x+8-8x$$
$$-5=-7x$$
$$x=\frac{5}{7}$$

$$P(A)=\frac{5}{7} \quad \rightarrow P(\overline{A})=\frac{2}{7}$$

תשובה: ההסתברות שהפרח הוא אדום היא $\frac{2}{7}$.

(2) נמצא את ההסתברות שהפרח הוא אדום, אם ידוע שהוא ורד.

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}}{0.25}=\frac{16}{21}$$

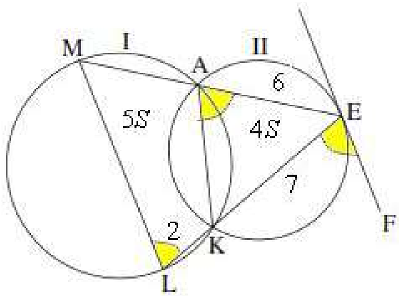
תשובה: ההסתברות היא $\frac{16}{21}$.

ב. מספר הורדים האדומים במחסן הוא 300 **וההסתברות לפרח ורד אדום היא** $\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{21}$,

לכן אם n **הוא מספר הפרחים במחסן אז :** $\frac{4}{21}n=300$ **ולכן** $n=1575$ **.**

תשובה: מספר הפרחים במחסן הוא 1575 **.**

הערה: אם נחשב את מספר הוורדים נקבל $0.25\cdot 1575=393.75$ **, מספר לא שלם ולמעשה "מְעַין נתון שגוי".**



<u>נתונים</u>

1. FE **משיק ב-** E

עבור ג: 2. $AE=6$ **ס"מ** **3.** $KE=7$ **ס"מ** **4.** $KL=2$ **ס"מ**

צ"ל: א. $FE \parallel LM$ **. ב.** $\Delta AEK \sim \Delta LEM$ **ג. (1)** $\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta LEM}}$ **(2)** $\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{AKLM}}$

הסבר		טענה	נימוק
1	5	FE משיק ב- E	נתון
5	6	$\sphericalangle FEK=\sphericalangle EAK$	זווית בין משיק למיתר
	7	$\sphericalangle MAK+\sphericalangle EAK=180°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
	8	$\sphericalangle MAK+\sphericalangle MLK=180°$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל- $180°$
6, 7, 8	9	$\sphericalangle FEK=\sphericalangle MLK$	הצבה
9	10	$FE \parallel LM$	אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים
		מ.ש.ל. א	
6, 9	11	$\sphericalangle FEK=\sphericalangle MLK$	הוּכַח
	12	$\sphericalangle AEK=\sphericalangle LEM$	זווית משותפת
11, 12	13	$\Delta AEK \sim \Delta LEM$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
13	14	$\frac{AE}{LE}=\frac{AK}{LM}=\frac{EK}{EM}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
2	15	$AE=6$ ס"מ	נתון
3	16	$KE=7$ ס"מ	נתון
4	17	$KL=2$ ס"מ	נתון
16, 17	18	$LE=9$ ס"מ	סכום קטעים
14, 15, 18	19	יחס הדמיון $\frac{AE}{LE}=\frac{2}{3}$	הצבה וחישוב
19	20	$\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta LEM}}=\frac{4}{9}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
		מ.ש.ל. ב(1)	
6, 23	24		סימון וחישוב
4	25	$S_{AKLM}=5S$	הפרש שטחים
24, 25	26	$\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{AKLM}}=\frac{4}{5}$	הצבה וחישוב
		מ.ש.ל. ב (2)	

נתונים

1. $AM = AK$ **2.** KD תיכון לשוק AM **3.** ME גובה לשוק AK

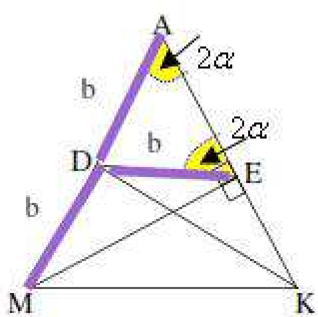
עבור ב. 4. $\sphericalangle MAK = 2\alpha$ **5.** $AM = 2b$

עבור ג. 6. $MK = 2DE$

צ"ל: א. $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$ **ב.** $S_{\Delta ADE}$ **ג. (1)** α **(2)** $DE \parallel MK$

הסבר		טענה	נימוק
3	7	ME גובה לשוק AK	נתון
7	8	$\sphericalangle AEM = 90°$	הגובה יוצר זווית ישרה
2	9	KD תיכון לשוק AM	נתון
9	10	$AD = DM$	התיכון חוצה את הצלע
8, 10	11	$DE = DA = DM$	התיכון ליתר שווה למחצית היתר
11	12	$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔADE
מ.ש.ל. א			

ונעבור לטריגונומטריה



ב. $\sphericalangle MAK = 2\alpha$ **(נתון) לכן גם (זוויות שוות)**

ובהתאם $\sphericalangle ADE = 180° - 2\alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔKDA $180°$**).**

$AM = 2b$ **ובהתאם** $DE = DA = DM = b$.

$$S_{\Delta ADE} = 0.5b \cdot b \sin(180° - 4\alpha)$$

$$\boxed{S_{\Delta ADE} = 0.5b^2 \sin 4\alpha}$$

תשובה: $S_{\Delta ADE} = 0.5b^2 \sin 4\alpha$

ג. (1) $MK = 2DE$ **, לכן** $MK = 2b$.

כמו כן $AM = AK$ **(נתון) ולכן גם** $AK = 2b$.

מתקבל שכל צלעות המשולש שוות ל- $2b$ **ולכן המשולש שווה צלעות, וזוויותיו** $60°$.

$$2\alpha = 60°$$

$$\boxed{\alpha = 30°}$$

תשובה: $\alpha = 30°$.

(2) $\sphericalangle AMK = 60°$ **, כפי שהראינו בסעיף הקודם.**

$\sphericalangle ADE = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$.

לכן: $\sphericalangle ADE = \sphericalangle MAK$.

תשובה: $DE \parallel MK$ **כי אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים.**

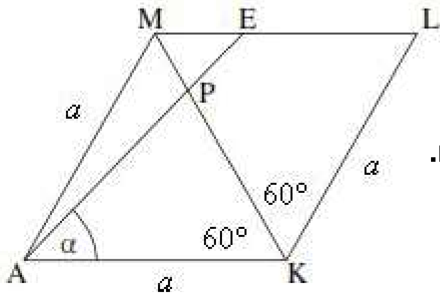
א. (1) $AMLK$ **מעוין – לכל כל הצלעות שוות ובמקרה זה שוות** a **.**

$\sphericalangle AML = 120°$ **ובהתאם** $\sphericalangle LKA = 120°$ **ו-** $\sphericalangle MAK = \sphericalangle MLK = 60°$

(במעוין - זוויות נגדיות שוות וזוויות סמוכות משלימות ל- $180°$**)**

כיוון שאלכסוני המעוין חוצי זוויות מתקבל ש-

תשובה: $\sphericalangle PKA = 60°$



(2) נמצא את PK **ב-** ΔPAK **באמצעות משפט הסינוסים.**

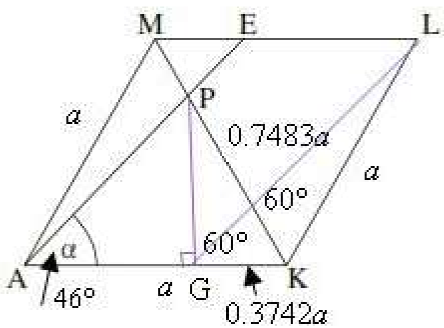
$$\frac{PK}{\sin\alpha} = \frac{AK}{\sin(180° - (60° + \alpha))}$$

$$\boxed{PK = \frac{a\sin\alpha}{\sin(60° + \alpha)}}$$

תשובה: $PK = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(60° + \alpha)}$

ב. נוריד אנך PG **לצלע** AK **(בניית עזר על פי השאלה).**

נתון כי $\alpha = 46°$**, ולכן** $PK = \dfrac{a\sin 46°}{\sin(60° + 46°)} = 0.7483a$ **.**



נמצא את GK **ב-** ΔPGK **ישר הזווית.**

$$\cos 60° = \frac{GK}{PK}$$

$$0.7483a \cdot \cos 60° = GK$$

$$\boxed{GK = 0.3742a}$$

נמצא את GL **ב-** ΔGLK **באמצעות משפט הקוסינוסים**

$$(GL)^2 = (GK)^2 + (KL)^2 - 2GK \cdot KL \cdot \cos\sphericalangle GKL$$

$$(GL)^2 = (0.3742a)^2 + a^2 - 2 \cdot 0.3742a \cdot a \cdot \cos 120°$$

$$(GL)^2 = 1.5142a^2 \quad \sqrt{\ }$$

$$\boxed{GL = 1.231a}$$

תשובה: $GL = 1.231a$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{4x}-6x$.

(1) תחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$\boxed{x\ge 0} \leftarrow 4x\ge 0$

תשובה: $x\ge 0$.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ובהתאם** $\boxed{(0,0)} \leftarrow f(0)=0\cdot\sqrt{4\cdot 0}-6\cdot 0=0$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ובהתאם** $0=x(\sqrt{4x}-6)=$.

ונקבל $(0,0)$ **, או** $\boxed{(9,0)} \leftarrow o.k.\ \ \sqrt{4\cdot 9}=6 \leftarrow 4x=36 \leftarrow \sqrt{4x}=6$

תשובה: $(0,0)$, $(9,0)$.

(3) $(0,0)$ **נקודת קצה, שאת סוג הקיצון שלה נקבע בהמשך.**

$$f'(x)=\sqrt{4x}+\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\,x}{\cancel{2}\sqrt{4x}}-6$$

$$f'(x)=\frac{4x+2x-6\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{6x-6\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}}$$

$$6x=6\sqrt{4x}$$

$$x=\sqrt{4x}$$

$$x^2=4x$$

$$x^2-4x=0 \quad \rightarrow x(x-4)=0$$

$$\cancel{x=0} \quad end\ point$$

$$x=4\rightarrow 4=\sqrt{4\cdot 4} \quad o.k.$$

$$f(4)=4\sqrt{4\cdot 4}-6\cdot 4=-8 \quad \rightarrow \boxed{(4,-8)}$$

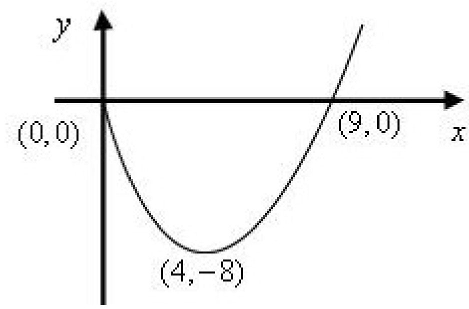
בנקודת הקצה הנגזרת אינה מוגדרת ובכל מקרה את סוג הקיצון של נקודת הקצה נקבע לפי ערכי הפונקציה.

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה.

x	0		4	
$f(x)$	0		-8	**לדוגמה** $f(9)=0$
מסקנה	Max	↘	Min	↗

תשובה: $(4,-8)$ **מינימום ,** $(0,0)$ **מקסימום.**

ב. הסקיצה של גרף הפונקציה.



ג. בתחום $1 \le x \le 10$ **נמצאת נקודת המינימום** $(4,-8)$**.**

הפונקציה יורדת אליה, כלומר הנגזרת שלילית עבור $1 \le x < 4$ **(הנגזרת מוגדרת עבור** $x=1$ **ושלילית).**

הפונקציה עולה ממנה, כלומר הנגזרת חיובית עבור $4 < x \le 10$**.**

ולכן גרף IV **מתאים, שכן הוא עובר משליליות לחיוביות פעם אחת.**

תשובה: גרף IV**.**

א. נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{16}{(x-a)^2}$ **,** $f(x)=(x-a)^2$ **.**

הגרף של $f(x)=(x-a)^2$ **הוא של פרבולה בעלת מינימום,** $(a,0)$**, על ציר ה-** x **.**

הגרף של $g(x)=\frac{16}{(x-a)^2}$ **, הוא עם שני ענפים, בשל תחום הגדרה** $x\neq a$

ובהתאם אסימפטוטה אנכית $x=a$ **, כי מאפס מכנה ולא מונה.**

ל- $g(x)$ **גם אסימפטוטה אופקית** $y=0$ **, כי חזקת פולינום המכנה (** 2 **) גדולה מזו של המונה (** 0 **).**

תשובה: $x=a$ **,** $y=0$

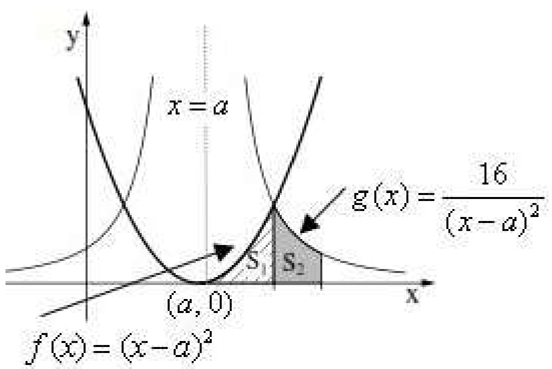
ב. שיעור ה- x **של אחת מנקודות החיתוך בין הפונקציות נתון והוא** $a+2$ **.**

$$S_2=\int_{a+2}^{a+3}\left(\frac{16}{(x-a)^2}-0\right)dx=\int_{a+2}^{a+3}16(x-a)^{-2}\,dx$$

$$S_2=\frac{16(x-a)^{-1}}{-1}\Big]_{a+2}^{a+3}=-\frac{16}{(x-a)}\Big]_{a+2}^{a+3}$$

$$S_2=\left(-\frac{16}{a+3-a}\right)-\left(-\frac{16}{a+2-a}\right)$$

$$S_2=-\frac{16}{3}+\frac{16}{2}\quad\rightarrow\boxed{S_1=2\frac{2}{3}}$$



$$S_1=\int_{a}^{a+2}\left((x-a)^2-0\right)dx$$

$$S_1=\frac{(x-a)^3}{3}\Big]_{a}^{a+2}$$

$$S_1=\left(\frac{(a+2-a)^3}{3}\right)-\left(\frac{(a-a)^3}{3}\right)$$

$$\boxed{S_1=2\frac{2}{3}}$$

שני השטחים שווים בגודלם ולכן היחס הוא $1:1$ **.**

תשובה: היחס הוא $1:1$ **.**

א. כאשר מחשבים שטח בין גרף של פונקציה לציר ה- x ,

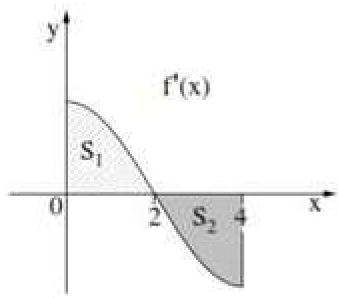
מוצאים בשלב ראשון את הפונקציה הקדומה.

בשאלה שלנו מוצג גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

ולמרות שלא ידועה תבנית הפונקציה – הרי שהפונקציה הקדומה היא $f(x)$,

שגם את תבניתה לא צריך לדעת – כי נתונים ערכיה באחד מקצוות השטח וידוע גודל השטח !!!

(1) נתון $f(0)=0$, $S_1=4$ ויש למצוא את $f(2)$.



$$S_1=\int_0^2 (f'(x)-0)dx$$

$$S_1=f(x)\Big]_0^2$$

$$4=f(2)-f(0)$$

$$4=f(2)-0$$

$$\boxed{f(2)=4}$$

תשובה: $f(2)=4$.

(2) נתון $S_2=4$ ויש למצוא את $f(4)$.

$$S_2=\int_2^4 (0-f'(x))dx$$

$$S_2=-f(x)\Big]_2^4$$

$$4=-f(4)-(-f(2))$$

$$4=-f(4)+4$$

$$\boxed{f(4)=0}$$

תשובה: $f(4)=0$.

ב. על פי גרף הנגזרת שבציור, ניתן לראות שהנגזרת $f'(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות, עבור $x=2$.

לכן, הפונקציה $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה בנקודה זו, ולכן $x=2$ מקסימום.

על פי תת סעיף א. (1) $f(2)=4$, ובהתאם $(2,4)$ מקסימום.

תשובה: $(2,4)$ מקסימום.

ג. נסרטט על פי המידע הקיים: נקודות הקצה: $(0,0)$, $(4,0)$, נקודת מקסימום: $(2,4)$.