א. $x\%$ **הוא אחוז ההנחה, שראובן מקבל עבור החבר הראשון, וגם של ההנחה הנוספת עבור החבר השני.**

המחיר המלא של המינוי הוא 200 **שקלים.**

לאחר ההנחה עבור החבר הראשון, המחיר הוא $200\cdot(\frac{100-x}{100})$ **שקלים.**

לאחר ההנחה עבור החבר השני, המחיר הוא $200\cdot(\frac{100-x}{100})\cdot(\frac{100-x}{100})$ **שקלים.**

נסמן $q=\frac{100-x}{100}$ **ומכיוון והמחיר שראובן שילם, לאחר שהביא שני חברים, הוא** 144.5 **שקלים,**

הרי שהמשוואה המתאימה היא $200\cdot q^2=144.5$ **.**

$$q^2=\frac{144.5}{200}$$
$$q^2=0.7225$$
$$q=0.85 \quad \leftarrow q>0$$

$q>0$ **כי אחוז ההנחה אינו יכול להיות גדול מ-** 100% **.**

$$0.85=\frac{100-x}{100}$$
$$85=100-x$$
$$\boxed{x=15}$$

תשובה: אחוז ההנחה שקיבל ראובן על המינוי שלו עבור החבר הראשון הוא 15**.**

ב. ראובן שילם 144.5 **שקלים במקום** 200 **שקלים עבור המינוי שלו.**

ההנחה שקיבל ראובן היא 55.5 **שקלים** $=200-144.5$**.**

אחוז ההנחה הוא $\frac{55.5}{200}\cdot 100=\boxed{27.75}$ **.**

תשובה: אחוז ההנחה הכולל שקיבל ראובן על המינוי שלו הוא 27.75**.**

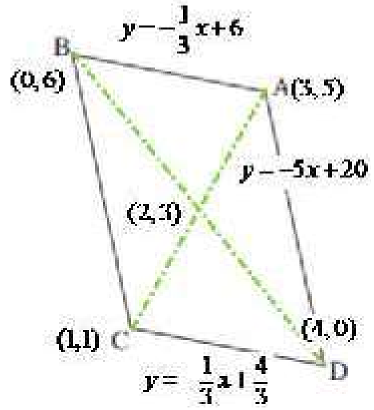
א. נמצא את שיעורי הקדקוד A **.**

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+6 \\ y=-5x+20 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3}x+6=-5x+20$$

$$4\frac{2}{3}x=14$$

$$x=3 \quad \rightarrow y=-5\cdot 3+20=5 \quad \rightarrow A(3,5)$$



במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

נמצא את שיעורי הקדקוד C **.**

$$\left.\begin{array}{ll} (2,3) & A(3,5) \\ 2=\frac{3+x_C}{2} & 3=\frac{5+y_C}{2} \\ 4=3+x_C & 6=5+y_C \\ x_C=1 & y_C=1 \end{array}\right\} \boxed{C(1,1)}$$

תשובה: $C(1,1)$**.**

ב. נמצא את משוואת הצלע CD **ששיפועה** $-\frac{1}{3}$ **כמו של** AB **הצלע המקבילה.**

$$m_{CD}=-\frac{1}{3}, \quad C(1,1)$$

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

נמצא את שיעורי הקדקוד D **.**

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \\ y=-5x+20 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=-5x+20$$

$$4\frac{2}{3}x=\frac{56}{3}$$

$$x=4 \quad \rightarrow y=-5\cdot 4+20=0 \quad \rightarrow \boxed{D(4,0)}$$

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

נמצא את שיעורי הקדקוד B **.**

$$(2,3) \quad D(4,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2=\dfrac{4+x_B}{2} & 3=\dfrac{0+y_B}{2} \\ 4=4+x_B & 6=y_B \\ x_B=0 & \end{array}\right\} \boxed{B(0,6)}$$

תשובה: $D(4,0)$ **,** $B(0,6)$**.**

ג. תנאי ההשקה הוא שהישר מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

שיפוע הצלע BC **הוא** -5 **, כמו זה של הצלע המקבילה** AD **.**

שיפוע הרדיוס הוא $m_{AC}=\dfrac{5-1}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2$

מכפלת השיפועים אינה -1 **ולכן הרדיוס אינו מאונך לצלע** BC**.**

תשובה: הצלע BC **אינה משיקה למעגל שמרכזו** A **ולרדיוס שלו** AC**.**

א. נסמן ב- p **את ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה, ובהתאם** $1-p$ **היא ההסתברות להיכשל במבחן זה.**

$$p=1-p+0.2$$
$$2p=1.2$$
$$\boxed{p=0.6}$$

תשובה: ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה היא 0.6

ב. (1) זו התפלגות בינומית, כאשר $n=4$, $p=0.6$ **על פי סעיף א,** $k=2$ **.**

$$P_4(2)=\binom{4}{2}(0.6)^2(1-0.6)^{4-2}$$
$$P_4(2)=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2$$
$$P_4(2)=6\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2$$
$$P_4(2)=0.3456$$

תשובה: ההסתברות שבדיוק שנים יצליחו במבחן הנהיגה היא 0.3456 **.**

(2) תשובה: הביטוי $\binom{4}{2}$ **שערכו** 6 **, מייצג את מספר האפשרויות שבדיוק שנים יצליחו במבחן הנהיגה.**

כיוון שכל האפשרויות שוות סיכוי הרי שההסתברות שיהיו אלו ראובן ושמעון שיצליחו היא $\frac{1}{6}$ **.**

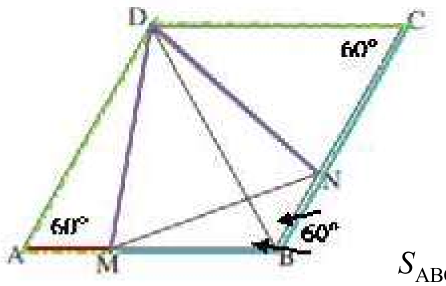
תשובה: ההסתברות שיהיו אלו ראובן ושמעון שיצליחו היא $\frac{1}{6}$**.**

ג. ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח היא: $1-0.4^4$ **.**

ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה ייכשל היא: $1-0.6^4$ **.**

לכן, ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח גדולה יותר.

תשובה: כן, ההסתברות גדולה יותר.



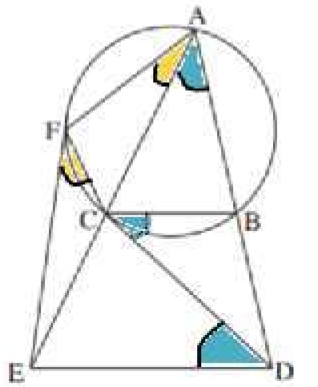
<u>נתונים</u>

.1 $ABCD$ **מעוין .2** $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 60^\circ$ **.3** $AM = BN$

עבור ג: .4 $S_{DBMN} = S$

צ"ל: א. $\Delta MDB \cong \Delta NDC$ **. ב.** $\Delta ADM \cong \Delta BDN$ **ג.** S_{ABCD}

הסבר		טענה	נימוק
1	**4**	$ABCD$ **מעוין**	**נתון**
4	**5**	$AB = BC$	**צלעות שוות במעוין**
3	**6**	$AM = BN$	**נתון**
6 ,5	**7**	$MB = CN$ **(צ)**	**חיסור קטעים שווים מקטעים שווים**
2	**8**	$\sphericalangle A = \sphericalangle C = 60^\circ$	**נתון**
4	**9**	$DC = CB$	**צלעות שוות במעוין**
9 ,8	**10**	$DC = CB = DB$	**משולש שווה שוקיים עם זווית** 60° **הוא שווה צלעות**
10	**11**	$DC = DB$ **(צ)**	**הוכח**
8 ,4	**12**	$\sphericalangle ABC = 120^\circ$	**זוויות סמוכות במעוין משלימות ל-** 180°
12 ,4	**13**	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = 60^\circ$	**אלכסוני המעוין חוצים את זוויותיו**
13 ,8	**14**	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle C$ **(ז)**	**כלל המעבר**
11 ,14 ,7	**15**	$\Delta MDB \cong \Delta NDC$	**משפט חפיפה צלע זווית צלע**
		מ.ש.ל. א	
9 ,1	**16**	$DB = AD$ **(צ)**	**צלעות שוות במעוין וכלל המעבר**
13 ,8	**17**	$\sphericalangle CBD = \sphericalangle A$ **(ז)**	**כלל המעבר**
16 ,17 ,6	**18**	$\Delta ADM \cong \Delta BDN$	**משפט חפיפה צלע זווית צלע**
		מ.ש.ל. ב	
4	**19**	$S_{DBMN} = S$	**נתון**
15	**20**	$S_{\Delta ADM} = S_{\Delta BDN} = S_1$	**שטחים שווים של משולשים חופפים וסימון**
18	**21**	$S_{\Delta MDB} = S_{\Delta NDC} = S_2$	**שטחים שווים של משולשים חופפים וסימון**
21 ,20 ,19	**22**	$S = S_1 + S_2$	**סכום שטחים**
21 ,20	**23**	$S_{ABCD} = 2S_1 + 2S_2$	**סכום שטחים**
23 ,19	**24**	$S_{ABCD} = 2S$	**חישוב**
		מ.ש.ל. ג	



<u>נתונים</u>

1. $BC \parallel DE$ **2.** DC **משיק ב-** C

עבור ב 3. EF **משיק ב-** F

צ"ל: א. (1) $\sphericalangle EAD = \sphericalangle CDE$ **(2)** $EC \cdot EA = DE^2$

ב. $\Delta ECF \sim \Delta EFA$ **ג.** $EF = DE$

הסבר		טענה	נימוק
1	4	$BC \parallel DE$	נתון
4	5	$\sphericalangle CDE = \sphericalangle BCD$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
2	6	DC משיק ב- C	נתון
6	7	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle EAD$	זוויות בין משיק למיתר
5, 7	8	$\sphericalangle EAD = \sphericalangle CDE$ (ז)	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א (1)	
	9	$\sphericalangle CED = \sphericalangle DEA$ (ז)	זווית משותפת
8, 9	10	$\Delta ECD \sim \Delta EDA$	משפט דמיון זווית זווית
10, 11	12	$\frac{EC}{ED} = \frac{ED}{EA}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
12	13	$EC \cdot EA = DE^2$	חישוב
		מ.ש.ל. א (2)	
3	14	EF משיק ב- F	נתון
14	15	$\sphericalangle CFE = \sphericalangle FAE$ (ז)	זוויות בין משיק למיתר
	16	$\sphericalangle FEC = \sphericalangle AEF$ (ז)	זווית משותפת
15, 16	17	$\Delta ECF \sim \Delta EFA$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב.	
17	18	$\frac{EC}{EF} = \frac{EF}{EA}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
18	19	$EC \cdot EA = EF^2$	חישוב
13, 19	20	$EF^2 = DE^2$	כלל המעבר
20	21	$EF = DE$	חישוב (גדלים חיוביים)
		מ.ש.ל. ג	

א. OAB **רבע מעגל – לכן** $\sphericalangle BOA = 90^\circ$.

AC **משיק למעגל בנקודה** C **, לכן** $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ **(רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה).**

$AC \parallel OD$ **(שני ישרים המאונכים לישר שלישי,** OA **, מקבילים זה לזה).**

תשובה: הוכח.

ב. CA **ו-** CP **שני משיקים היוצאים מאותה נקודה, לכן** OC **חוצה זווית** C **(הקטע מהנקודה למרכז המעגל חוצה את הזווית שבין המשיקים)**

$\sphericalangle ACO = 90^\circ - \alpha$ **(סכום זוויות** 180° **ב-** ΔABC **) ולכן** $\sphericalangle PCA = 180^\circ - 2\alpha$ **,**

ובהתאם $\sphericalangle D = 2\alpha$ **(זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל-** 180° **).**

$\sphericalangle OPD = 90^\circ$ **(רדיוס משיק למעגל בנקודת ההשקה)**

$\underline{\Delta ACO}$

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AO}$$

$$\boxed{AC = R\tan\alpha}$$

$\underline{\Delta OPD}$

$$\sin 2\alpha = \frac{OP}{OD}$$

$$\boxed{OD = \frac{R}{\sin 2\alpha}}$$

כיוון שנתון כי הנקודה D **היא על המשך** OB **, הרי שלא אפשרי כי** D **תתלכד עם** B **ו-** P **כך שהמרובע** $ACDO$ **יהיה ריבוע, ולכן נותרה רק האפשרות שהוא טרפז.**

$$S_{ACDO} = \frac{1}{2}\cdot(OD + AC)\cdot OA = \frac{1}{2}R(\frac{R}{\sin 2\alpha} + R\tan\alpha) = \boxed{0.5R^2(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \tan\alpha)}$$

תשובה: שטח המרובע $ACDO$ **הוא** $0.5R^2(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \tan\alpha)$ **.**

ג. נתון כי שטח המשולש OPD **הוא** $\frac{1}{2}R^2$ **.**

כיוון שזהו משולש ישר זווית, שאחד מניצביו הוא $OP = R$ **,**

הרי שעל פי נוסחת השטח גם הניצב השני $DP = R$ **(** $\frac{R^2}{2} = \frac{R\cdot DP}{2} \quad \rightarrow DP = R$ **).**

מכאן שהמשולש הוא ישר-זווית ושווה-שוקיים, כך שזוויות הבסיס שוות ל- 45° **.**

הראינו כי $\sphericalangle D = 2\alpha$ **ועתה קיבלנו כי** $\sphericalangle D = 45^\circ$ **, ולכן** $2\alpha = 45^\circ$ **ו-** $\boxed{\alpha = 22.5^\circ}$

תשובה: $\alpha = 22.5°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{9}{(x+1)^2}-1$ **.**

תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

תשובה: $x\neq -1$.

ב. ארבע הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה)

$f(100)=-0.999\to -1,\quad f(-100)=-0.999\to -1,$ **, מסקנה:** $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית.**

$f(-1.01)=89,999\to +\infty,\quad f(-0.99)=89,999\to +\infty,$ **, מסקנה:** $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ושיעורי נקודת החיתוך** $(0,8)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל:**

$$0=\frac{9}{(x+1)^2}-1$$

$$1=\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$(x+1)^2=9$$

$$x+1=3\quad \to x=2\quad \to (2,0)$$

$$x+1=-3\quad \to x=-4\quad \to (-4,0)$$

תשובה: $(0,8)$, $(2,0)$, $(-4,0)$.

ג. תשובה: $y=-1$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** x **,** $x=-1$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** y **.**

ד. נמצא תחומי עלייה וירידה.

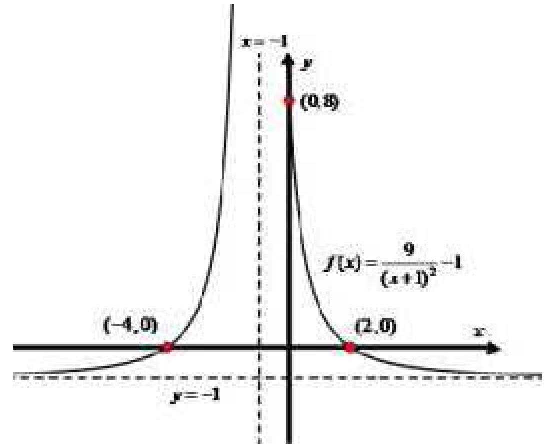
$$f'(x)=\frac{-9\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-18(x+1)}{(x+1)^4}}$$

הנגזרת אינה מתאפסת בתחום ההגדרה $x\neq -1$ **, כאשר עבור** $x>-1$ **הנגזרת שלילית, ועבור** $x<-1$ **חיובית.**

תשובה: $x>-1$ **ירידה ,** $x<-1$ **עלייה.**

ה. הסקיצה המתאימה:



ו. גרף II מתאים להציג את הסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

<u>נימוקים</u>

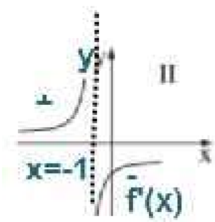
(1) $x=-1$ הוא אסימפטוטה אנכית גם של $f'(x)$.

(2) $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית.

(3) בתחום העלייה של $f(x)$ הנגזרת חיובית, ובגרף II קיימת חיוביות עבור $x<-1$.

(4) בתחום הירידה של $f(x)$ הנגזרת שלילית, ובגרף II קיימת שליליות עבור $x>-1$.

(5) הראינו כי הנגזרת אינה מתאפסת לכל x וגרף II אינו חותך את ציר ה- x .



תשובה: גרף II.

א. (1) נתונות שתי פונקציות $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ **פונקציה חיובית ולכן גרף** I **,**

ו- $g(x)=-\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ **פונקציה שלילית ולכן גרף** II **.**

לשתי הפונקציות תחום הגדרה זהה, $2x-3>0$ **ולכן** $x>1.5$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של שתי הפונקציות $x>1.5$**.**

(2) לשתי הפונקציות גם אסימפטוטה אנכית זהה, הישר $x=1.5$ **, כי** $x=1.5$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

תשובה: הישר $x=1.5$ **הוא אסימפטוטה אנכית של שתי הפונקציות.**

ב. תשובה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ **- גרף** I **,** $g(x)=-\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ **- גרף** II **. (הסבר בסעיף א.)**

ג. שתי הפונקציות נגדיות, $g(x)=-f(x)$ **, לכן אם** $y_{\mathrm{A}}=2=-y_{\mathrm{B}}$ **אז** $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{B}}$**.**

$2=\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ **ובהתאם** $\sqrt{2x-3}=1$ **.** $2x-3=1$ **ו-** $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{B}}=2$

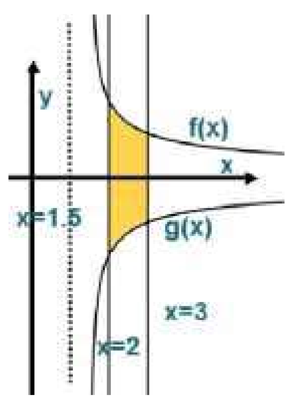
שתי הפונקציות נגדיות ולכן השטח בין הפונקציות, ובין הישרים $x=2$ **ו-** $x=3$ **(מסומן בצהוב בציור)**
כפול מהשטח שבין אחת מהן לציר ה- x **(חצי מהשטח הצהוב).**

$$S=2\cdot\int_2^3\left(\frac{2}{\sqrt{2x-3}}-0\right)dx=$$

$$S=2\cdot\frac{2\cdot2\sqrt{2x-3}}{2}\Big]_2^3=4\sqrt{2x-3}\Big]_2^3$$

$$S=(4\sqrt{2\cdot3-3})-(4\sqrt{2\cdot2-3})$$

$$\boxed{S=4\sqrt{3}-4}$$



תשובה: השטח הוא $4\sqrt{3}-4$ **.**

א. כיוון ש- $ABCD$ **מלבן, הרי שהצלעות מקבילות זה לזה, ובפרט** $AB \parallel BC$ **ולכן** $AB \parallel CF$ **.**

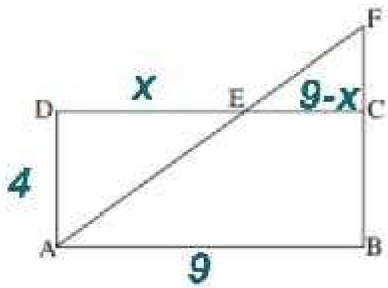
על פי משפט תאלס הרחבה 2 $\frac{FC}{AD}=\frac{EC}{DE}=\frac{FE}{AE}$ **ומכאן ש-** $\Delta ADE \sim \Delta FCE$ **על פי משפט דמיון צלע צלע צלע.**

תשובה: מ.ש.ל.

ב. הפונקציה שיש להביא למינימום **היא** סכום שטחי שני המשולשים ADE ו- FCE .

נסמן $DE = x$ **ובהתאם** $EC = 9 - x$ **כי** $DC = AB = 9$ **.**

ראינו כי $\frac{FC}{AD}=\frac{EC}{DE}=\frac{FE}{AE}$ **ולכן** $\frac{FC}{4}=\frac{9-x}{x}$ **. נקבל ש-** $FC=\frac{4(9-x)}{x}$



$$f(x)=\frac{4\cdot x}{2}+\frac{(9-x)\cdot\frac{4(9-x)}{x}}{2}$$

$$f(x)=2x+\frac{2(9-x)^2}{x}$$

כאשר במכנה יש ביטוי פשוט (כמו x **,** x^2 **,** $2x^3$ **) - מומלץ לחלק בו לפני תהליך הגזירה.**

$$f(x)=2x+\frac{2(81-18x+x^2)}{x}$$

$$f(x)=2x+\frac{162}{x}-36+2x$$

$$\boxed{f(x)=4x+\frac{162}{x}-36}$$

$$f'(x)=4-\frac{162}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4x^2-162}{x^2}}$$

$$4x^2-162=0$$

$$x^2=40.5$$

$$\boxed{x=\sqrt{40.5}}$$

מונה הנגזרת הוא ביטוי ריבועי, שמתאימה לו פרבולה ישרה בעלת מינימום.

עבור $x=\sqrt{40.5}$ **הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות ולכן הפונקציה מירידה לעלייה וזהו מינימום.**

תשובה: $DE=\sqrt{40.5}$ **.**