א. נסמן ב- x את מהירות הרוכב (קמ"ש) מיישוב A ליישוב B.

המרחק מיישוב A ליישוב B הוא 30 ק"מ, וזה המרחק אותו עברה המכונית הן הלוך והן חזור.

בדרך מ- B ל- A: המהירות הייתה קטנה ב- 3 קמ"ש מהדרך מ- A ל- B, כלומר, $x-3$.

$s = vt$ **- המרחק (s) שווה למהירות (v) כפול זמן (t)**

נשלים את הנתונים בטבלה.

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
הלוך – מ- A ל- B	$\frac{30}{x}$	x	30
חזור- מ- B ל- A	$\frac{30}{x-3}$	$x-3$	30

זמן הרכיבה, בדרך חזרה, היה ארוך ב- $\frac{5}{6}=\frac{50}{60}$ שעות מזמן הרכיבה הלוך.

המשוואה המתאימה היא: $\frac{30}{x-3}=\frac{30}{x}+\frac{5}{6}$.

נפתור את המשוואה:

$$\frac{^{6x/}30}{x-3}=\frac{^{6(x-3)}30}{x}+\frac{^{x(x-3)}5}{6} \quad /\cdot 6x(x-3)$$
$$180x=180(x-3)+5x(x-3)$$
$$180x=180x-540+5x^2-15x$$
$$0=5x^2-15x-540$$
$$x_{1.2}=\frac{15\pm105}{10}$$
$$\boxed{x=12} \leftarrow x>3$$

תשובה: מהירות הרוכב בדרכו ליישוב B הייתה 12 קמ"ש.

ב. נמצא את זמן הרכיבה, מיישוב A ליישוב B במהירות 12 קמ"ש: 2.5 שעות $=\frac{30}{12}$.

לכן, הרוכב רכב <u>שעה</u> נוספת $(3.5-2.5=1)$, בדרך חזרה, במהירות 9 קמ"ש $12-3$, כלומר עבר 9 ק"מ.

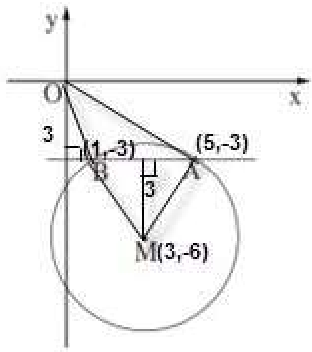
תשובה: הרוכב היה במרחק 9 ק"מ מיישוב B, בדרכו חזרה ליישוב A.

א. שיעור ה- y **של הנקודה** A **, הנמצאת על הישר** $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ **, הוא** -3 **.**

נציב $y=-3$ **במשוואת הישר:** $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ **:**

$$-3=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \quad /\cdot 3$$
$$-9=-2x+1$$
$$2x=1+9$$
$$x=5 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{A}(5,-3)}$$

תשובה: $\mathrm{A}(5,-3)$ **.**



ב. נמצא את רדיוס המעגל, שמרכזו $\mathrm{M}(3,-6)$ **.**

$$R=\sqrt{(3-5)^2+(-6-(-3))^2}=\sqrt{13}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-3)^2+(y+6)^2=13$ **.**

ג. נציב $y=-3$ **במשוואת המעגל** $(x-3)^2+(y+6)^2=13$ **.**

$$(x-3)^2+(-3+6)^2=13$$
$$(x-3)^2=4$$
$$x-3=2 \quad \rightarrow x=5 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{A}(5,-3)}$$
$$x-3=-2 \quad \rightarrow x=1 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{B}(1,-3)}$$

נחשב את שטח המרובע OAMB **, כסכום של שטחי שני משולשים.**

$$S_{\Delta \mathrm{ABM}}=\frac{\mathrm{AB}\cdot h_{\mathrm{AB}}}{2}$$
$$\mathrm{AB}=x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=5-1=4$$
$$h_{\mathrm{AB}}=-3-y_{\mathrm{M}}=-3-(-6)=3$$
$$S_{\Delta \mathrm{ABM}}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$$

$$S_{\Delta \mathrm{ABO}}=\frac{\mathrm{AB}\cdot h_{\mathrm{AB}}}{2}$$
$$h_{\mathrm{AB}}=y_{\mathrm{O}}-(-3)=0-(-3)=3$$
$$S_{\Delta \mathrm{ABO}}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$$

תשובה: שטח המרובע OAMB **הוא** 12 **.**

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- נשים** $\overline{A}$ **- גברים**

B **- מעדיפים להתחיל בשעה 8:00** $\overline{B}$ **- מעדיפים להתחיל בשעה 9:00**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$(1)\quad P(A\cap B)=0.2$$

$$(2)\quad P(B/A)=0.25\quad\rightarrow P(\overline{B}/A)=0.75$$

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$0.25=\frac{0.2}{P(A)}$$

$$P(A)=0.8\quad\rightarrow P(\overline{A})=0.2,\ P(A\cap\overline{B})=0.6$$

$$(3)\quad P(B/\overline{A})=0.5\quad\rightarrow P(\overline{B}/\overline{A})=0.5$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.5=\frac{P(B\cap\overline{A})}{0.2}$$

$$P(B\cap\overline{A})=0.1$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים:

	A **נשים**	$\overline{A}$ **גברים**	
B **- 8:00**	0.2	0.1	0.3
$\overline{B}$ **- 9:00**	0.6	0.1	0.7
	0.8	0.2	1

תשובה: ההסתברות שנבחר מורה (גבר/ אישה) שמעדיף להתחיל את הלימודים בשעה 8:00 היא 0.3.

ב. נמצא מהי ההסתברות שהמורה, שידוע שמעדיף להתחיל לימודים בשעה 9:00, הוא אישה.

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.6}{0.7}=\frac{6}{7}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{6}{7}$.

ג. נחשב את ההסתברות למאורע "בדיוק 1 **מ-** 5 **מורים שמעדיף להתחיל לימודים בשעה 9:00",**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p = P(\overline{B}) = 0.7$, $n = 5$ **,** $k = 1$

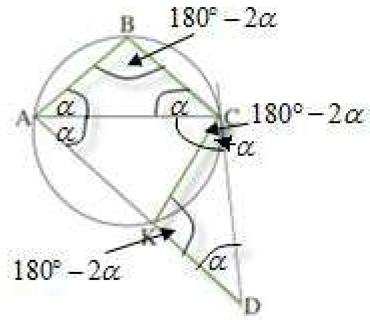
$$P_5(1) = \binom{5}{1}(0.7)^1(1-0.7)^{5-1}$$

$$P_5(1) = \frac{5!}{1!(5-1)!}\cdot 0.7 \cdot 0.3^4$$

$$P_5(1) = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4$$

$$P_5(1) = 0.02835$$

תשובה: ההסתברות היא 0.02835 **.**



<u>נתונים</u>

1. $AB=BC$.

2. CD **משיק למעגל בנקודה** C .

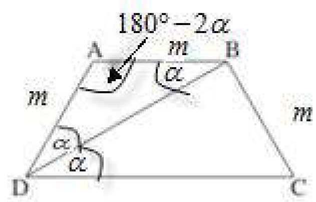
3. $AD \parallel BC$.

צ"ל: א. ΔACD **שווה שוקיים.**

ב. $\sphericalangle CKD=\sphericalangle ABC$.

ג. $\Delta ABC \cong \Delta CKD$.

הסבר		טענה	נימוק
1	4	$AB=BC$	נתון
4	5	$\sphericalangle BAC=\sphericalangle BCA=\alpha$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔACB וסימון
5	6	$\sphericalangle ABC=180^\circ-2\alpha$	סכום זוויות 180° ב- ΔACB
3	7	$AD \parallel BC$	נתון
5, 7	8	$\sphericalangle CAD=\sphericalangle BCA=\alpha$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים וכלל המעבר
2	9	CD משיק למעגל בנקודה C	נתון
6, 9	10	$\sphericalangle ACD=180^\circ-2\alpha$	זווית בין משיק למיתר וכלל המעבר
8, 10	11	$\sphericalangle D=\alpha$	סכום זוויות 180° ב- ΔACD
8, 11	12	$\sphericalangle D=\sphericalangle CAD=\alpha$	כלל המעבר
12	13	ΔACD שווה שוקיים	אם שתי זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים
		מ.ש.ל. א	
	14	$\sphericalangle AKC+\sphericalangle ABC=180^\circ$	זוויות נגדיות ב- $AKCB$ מרובע חסום במעגל משלימות ל- 180°
	15	$\sphericalangle AKC+\sphericalangle CKD=180^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
7, 14, 15	16	$\sphericalangle CKD=\sphericalangle ABC=180^\circ-2\alpha$ (ז)	חישוב
		מ.ש.ל. ב	
8	17	$AB=CK$ (צ)	על זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים
11, 16	18	$\sphericalangle DCK=\alpha$	סכום זוויות 180° ב- ΔKCD
5, 18	19	$\sphericalangle DCK=\sphericalangle BAC$ (ז)	כלל המעבר
16, 17, 19	20	$\Delta ABC \cong \Delta CKD$	משפט חפיפה זווית צלע זווית
		מ.ש.ל. ג	



א. $\sphericalangle ABD = \alpha$ **(נתון).** $AB \parallel DC$ **(נתון) .**

$AB < DC$ **(נתון) ולכן** $0° < \sphericalangle ADC < 90°$ **(זווית חדה).**

$AD = AB = BC = m$ **(נתון) .**

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = \alpha$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים).**

$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD = \alpha$ **(זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים).**

$\sphericalangle DAB = 180° - 2\alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔABD **שווה ל-** $180°$**).**

$S_{\Delta DAB} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$ **(נתון)**

$$\frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m \cdot m \cdot \sin(180° - 2\alpha)}{2}$$

$$\frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2 \sin 2\alpha}{2} \quad / : \frac{m^2}{2} > 0$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\alpha = 60° \quad \cancel{2\alpha = 120°} \quad \leftarrow 0° < 2\alpha < 90°$$

$$\boxed{\alpha = 30°}$$

תשובה: $\alpha = 30°$.

ב. $\sphericalangle ADC = 60°$ **(סכום זוויות).** $S_{ABCD} = 27\sqrt{3}$ **(נתון).** $AE \perp DC$ **(בניית עזר).**

<u>ΔADE</u>

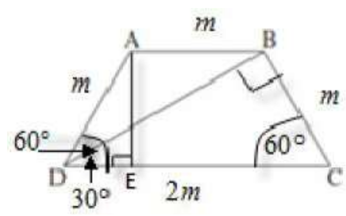
$$\sin \sphericalangle ADE = \frac{AE}{DE}$$

$$\sin 60° = \frac{AE}{m}$$

$$\boxed{AE = m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\sphericalangle BCD = 60°$ **(זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים).** $\sphericalangle DBC = 90°$ **(סכום זוויות ב-** ΔCBD **שווה ל-** $180°$**).**

$DC = 2m$ **(ב-** ΔCBD $(30°, 60°, 90°)$ **ניצב מול זווית** $30°$ **שווה למחצית היתר).**



$$S_{ABCD} = 27\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AE}{2}$$

$$27\sqrt{3} = \frac{(m + 2m) \cdot m\sqrt{3}/2}{2}$$

$$108 = 3m^2$$

$$\boxed{m = 6} \quad \leftarrow m > 0$$

תשובה: $m = 6$.

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{(x-5)^2}$.

תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

תשובה: $x\neq 5$.

(2) ארבע הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה).

$f(100)=0.9999\to 1,\quad f(-100)=0.9999\to 1$ **, מסקנה:** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

$f(5.01)=-9,999\to -\infty,\quad f(-4.99)=-9,999\to -\infty$ **, מסקנה:** $x=5$ **אסימפטוטה אנכית.**

נימוקים אפשריים נוספים:

הביטוי $\frac{1}{(x-5)^2}$ **שואף ל-** 0**, כאשר** x **שואף ל-** $\pm\infty$**, כי חזקת המכנה (** 2 **) גדולה מחזקת המונה (** 0 **),**

ולכן ההפרש שלו מ- 1 **הוא** 1 **וגרף הפונקציה שואף לישר** $y=1$ **, שהוא האסימפטוטה האופקית.**

$x=5$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=5$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** x **,** $x=5$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** y **.**

(3)בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $\boxed{(0,0.96)}\leftarrow$ $f(0)=1-\frac{1}{(0-5)^2}=0.96$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$0=1-\frac{1}{(x-5)^2}$$

$$\frac{1}{(x-5)^2}=1$$

$$1=(x-5)^2$$

$$1=x-5\quad\to\quad\to x=6\quad\to\boxed{(6,0)}$$

$$-1=x-5\quad\to\quad\to x=4\quad\to\boxed{(4,0)}$$

תשובה: $(0,0.96)$ **,** $(4,0)$ **,** $(6,0)$ **.**

(4) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x) = -\frac{0-2(x-5)}{(x-5)^4}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2(x-5)}{(x-5)^4}}$$

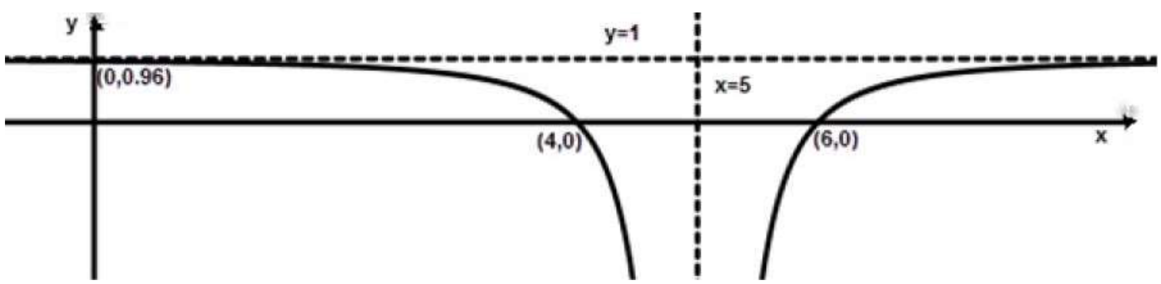
ניתן לצמצם בביטוי $x-5$ **, אולם נוח לשמור מכנה חיובי.**

עבור $x<5$ **נקבל שהמונה יהיה שלילי וסימן הנגזרת שלילי (הפונקציה יורדת בתחום** $x<5$ **).**

עבור $x>5$ **נקבל שהמונה יהיה חיובי וסימן הנגזרת חיובי (הפונקציה עולה בתחום** $x>5$ **).**

תשובה: $x<5$ **- סימן הנגזרת שלילי,** $x>5$ **- סימן הנגזרת חיובי.**

ב. הסרטוט המתאים:



ג. נקודת ההשקה היא $(4,0)$.

נציב $x=4$ **בנגזרת ונמצא את שיפוע המשיק :** $m = f'(4) = \frac{2(4-5)}{(4-5)^4} = -2$.

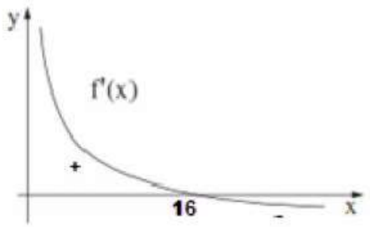
נמצא את משוואת המשיק: $y-0=-2(x-4) \rightarrow y=-2x+8$.

נקודת חיתוך עם האסימפטוטה האופקית, $y=1$ **:** $1=-2x+8 \rightarrow x=3.5 \rightarrow \boxed{(3.5,1)}$

נקודת חיתוך עם האסימפטוטה האנכית, $x=5$ **:** $y=-2\cdot5+8=-2 \rightarrow \boxed{(5,-2)}$

תשובה: $(3.5,1)$ **,** $(5,-2)$.

א. בציור מתואר גרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}-1$ **.**



בנקודת החיתוך של $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}-1$ **עם ציר ה-** x **מתקיים** $f'(x)=0$ **.**

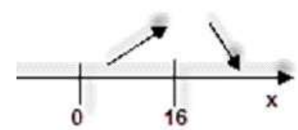
$$0=\frac{4}{\sqrt{x}}-1$$

$$1=\frac{4}{\sqrt{x}} \quad \to \sqrt{x}=4$$

$$\boxed{x=16}$$

תשובה: $x=16$ **.**

ב. על פי תחומי החיוביות, $0<x<16$ **, והשליליות,** $x>16$ **, של פונקציית הנגזרת, הבאים לידי ביטוי בציור,**
ניתן לקבוע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה הקדומה $f(x)$ **, המוגדרת בתחום** $x\geq 0$ **.**



ולכן $x=16$ **הוא שיעור ה-** x **של נקודת מקסימום פנימי.**

תשובה: $x=16$ **, מקסימום.**

ג. נתון כי $y=0$ **בנקודת המקסימום הפנימית, כלומר שיעורי נקודת הקיצון (מקסימום) הם** $(16,0)$ **.**
נמצא את הפונקציה הקדומה, כאשר הצבת שיעורי נקודת הקיצון תאפשר למצוא את קבוע האינטגרציה.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int (\frac{4}{\sqrt{x}}-1)\,dx$$

$$f(x)=4\cdot 2\sqrt{x}-x+c$$

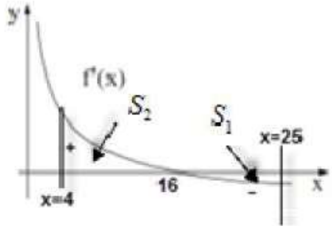
$$0=8\sqrt{16}-16+c \quad \leftarrow f(16)=0$$

$$-16=c$$

$$\boxed{f(x)=8\sqrt{x}-x-16}$$

תשובה: $f(x)=8\sqrt{x}-x-16$.

ד. נחשב את השטח, המורכב משני שטחים, כמסומן בציור.



$$S_1=\int_{16}^{25}(0-f'(x))dx=-f(x)\Big]_{16}^{25}=-f(25)+f(16)$$

$$S_1=(-(8\sqrt{25}-25-16))+0=1 \quad \to S_1=1$$

$$S_2=\int_{4}^{16}(f'(x)-0)dx=f(x)\Big]_{4}^{16}=f(16)-f(4)$$

$$S_2=(0)-(8\sqrt{4}-4-16)=4 \quad \to S_2=4$$

וגודל השטח המבוקש: $S_1+S_2=1+4=5$ **.**

תשובה: גודל השטח הוא 5 **יח"ר.**

א. נתון כי שיעור ה- x **של הנקודה** A **הוא** t $(t>0)$.

בהתאם שיעורי הנקודה A **שעל** $f(x)=-x^2+9$ **(פרבולה בעלת מקסימום) הם** $A(t,-t^2+9)$.

AC **מקביל לציר ה-** x **ולכן** $y_C=y_A$.

ציר הסימטריה של $f(x)=-x^2+9$ **הוא** $x=0$**, ולכן שיעורי הנקודה** C **הם** $C(-t,-t^2+9)$.

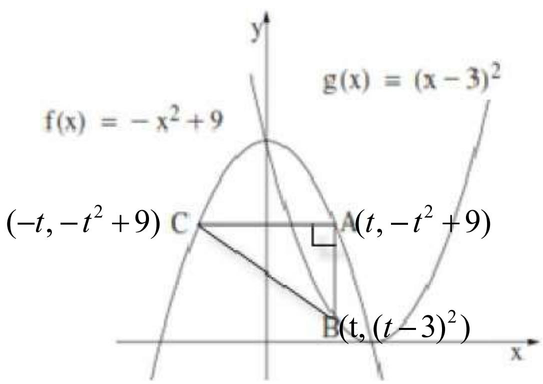
AB **מקביל לציר ה-** y **ולכן** $x_B=x_A$.

שיעורי הנקודה B, **הנמצאת על** $g(x)=(x-3)^2$**, (פרבולה בעלת מינימום), הם:** $B(t,(t-3)^2)$.

תשובה: $A(t,-t^2+9)$ **,** $B(t,(t-3)^2)$ **,** $C(-t,-t^2+9)$.

ב. הפונקציה שיש להביא ***למקסימום*** **היא** ***שטח המשולש*** ABC.

נביע באמצעות t **את שטח המשולש** ABC **(**$\sphericalangle A=90°$**):**



$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}$$

$$AB=y_A-y_B$$

$$AB=-t^2+9-(t-3)^2$$

$$AB=-t^2+9-(t^2-6t+9)$$

$$AB=-t^2+9-t^2+6t-9$$

$$\boxed{AB=-2t^2+6t}$$

$$AC=x_A-x_C$$

$$AC=t-(-t)$$

$$\boxed{AC=2t}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{(-2t^2+6t)\cdot\cancel{2}t}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=-2t^3+6t^2}$$

נמצא את נקודת הקיצון:

$$\boxed{S'(t)=-6t^2+12t}$$

$$0=-6t^2+12t$$

$$0=6t(-t+2)$$

$$\boxed{t=2}\quad\leftarrow t>0$$

$$\boxed{S''(t)=-12t+12}$$

$$S''(2)=-12\cdot2+12=-12<0\quad\to \underline{Max}$$

תשובה: $t=2$ **יביא את שטח משולש** ABC **למקסימום.**