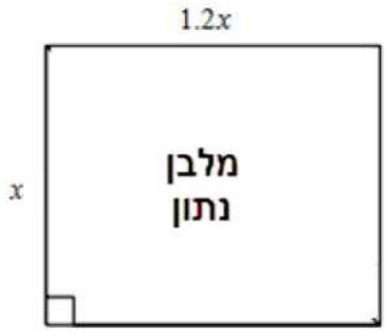
א. (1) נסמן ב- x (ס"מ) את רוחב המלבן הנתון, ובהתאם אורכו, הגדול פי 1.2 הוא $1.2x$.

הגדילו את אורך המלבן ב- 10%, ולכן אורך המלבן החדש הוא: $\frac{100+10}{100}\cdot 1.2x = 1.1\cdot 1.2x = 1.32x$.

הקטינו את אורך המלבן ב- 10%, ולכן רוחב המלבן החדש הוא: $\frac{100-10}{100}\cdot x = 0.9x$.



שטח המלבן החדש, הוא מכפלת אורכו ברוחבו, $0.9x\cdot 1.32x = 1.188x^2$.

תשובה: שטח המלבן החדש הוא $1.188x^2$.

(2) שטח המלבן הנתון הוא $x\cdot 1.2x = 1.2x^2$ **.**

השטח של המלבן החדש קטן ב- $1.2x^2 - 1.188x^2 = 0.012x^2$**.**

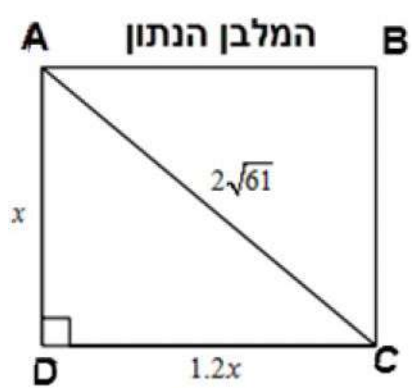
השינוי הוא $\frac{0.012x^2}{1.2x^2} = 0.01$ **מהשטח של המלבן הנתון, המהווה אחוז אחד משטחו.**

תשובה: השטח של המלבן הנתון השתנה באחוז אחד.

ב. $\sqrt{61}$ **ס"מ** $= R$ **הוא רדיוס של המעגל החוסם את המלבן הנתון.**

כיוון שזוויות המלבן ישרות, הרי שאלכסון המלבן הוא קוטר המעגל ואורכו הוא $2\sqrt{61}$ ס"מ.

על פי משפט פיתגורס, במשולש ACD :



$$x^2 + (1.2x)^2 = (2\sqrt{61})^2$$
$$x^2 + 1.44x^2 = 244$$
$$2.44x^2 = 244$$
$$x^2 = 100$$
$$\boxed{x=10} \leftarrow x>0$$

נציב $x=10$ בביטוי האלגברי של שטח המלבן החדש,

ונקבל ששטחו הוא 118.8 סמ"ר $= 1.188\cdot 10^2$**.**

תשובה: שטחו של המלבן החדש הוא 118.8 סמ"ר.

א. (1) המעגל $(x-3)^2+(y+k)^2=25$ **עובר דרך ראשית הצירים.**

נציב $(0,0)$ **במשוואת המעגל.**

$$(0-3)^2+(0+k)^2=25$$
$$k^2=16$$
$$\boxed{k=\pm 4}$$

תשובה: $k=4$ **או** $k=-4$.

(2) נציב $k=4$ **או** $k=-4$ **, ונקבל את משוואות שני המעגלים.**

תשובה: $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ **,** $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ **.**

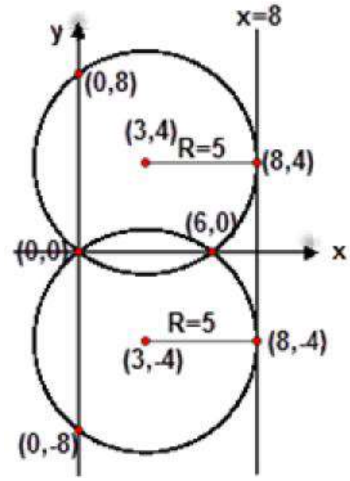
ב. נמצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד משני המעגלים.

	$(x-3)^2+(y+4)^2=25$	$(x-3)^2+(y-4)^2=25$
ציר ה- x **נציב** $y=0$	$(x-3)^2+(0+4)^2=25$ $(x-3)^2=9$ $x-3=3 \rightarrow x=6 \rightarrow \boxed{(6,0)}$ $x-3=-3 \rightarrow x=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$	$(x-3)^2+(0-4)^2=25$ $(x-3)^2=9$ $x-3=3 \rightarrow x=6 \rightarrow \boxed{(6,0)}$ $x-3=-3 \rightarrow x=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$
ציר ה- y **נציב** $x=0$	$(0-3)^2+(y+4)^2=25$ $(y+4)^2=16$ $y+4=4 \rightarrow y=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$ $y+4=-4 \rightarrow y=-8 \rightarrow \boxed{(0,-8)}$	$(0-3)^2+(y-4)^2=25$ $(y-4)^2=16$ $y-4=4 \rightarrow y=8 \rightarrow \boxed{(0,8)}$ $y-4=-4 \rightarrow y=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$

תשובה: מעגל $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ **:** $(6,0)$, $(0,0)$, $(0,-8)$ **.**

מעגל $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ **:** $(6,0)$, $(0,0)$, $(0,8)$ **.**

ב. נסרטט את שני המעגלים במערכת צירים אחת, כולל סימונים עבור סעיף ד.



ד. (1) הישר $x=a$ משיק לשני המעגלים.

כיוון שמרכזי שני המעגלים נמצאים על הישר $x=3$, ורדיוסי שני המעגלים שווים ל- 5,

הרי שיש שני משיקים, אחד מימין ואחד משמאל.

נתון כי $a>0$, ולכן משוואת המשיק היא $x=8$.

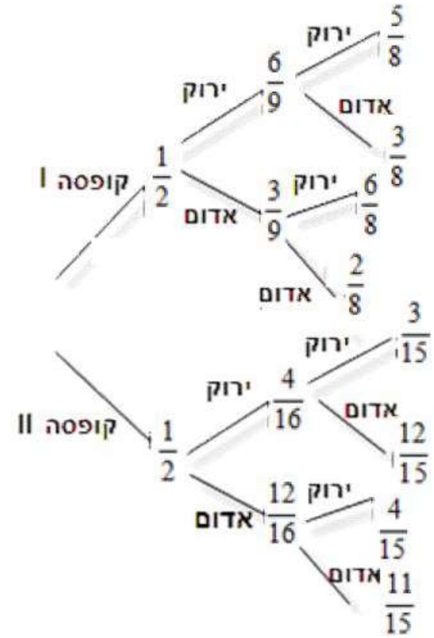
תשובה: $a=8$.

(2) שיעורי ה- y של נקודות ההשקה נשארים שווים,

ושיעור ה- x גדול ב- 5 מזה של מרכז המעגל המתאים.

תשובה: מעגל $(x-3)^2+(y+4)^2=25$: $(8,-4)$.

מעגל $(x-3)^2+(y-4)^2=25$: $(8,4)$.



א. נבנה עץ הסתברויות מתאים לסיפור,

כאשר ההסתברות לבחירת קופסה באקראי היא $\frac{1}{2}$**,**

וכאשר בוחרים כדור –

ההסתברות היא בהתאם למספר הכדורים בצבע המתאים,

מתוך סך הכדורים בקופסה.

כיוון, שהוצאת הכדור היא ללא החזרה,

אז מספר הכדורים בצבע שהוצא יורד באחד,

וגם מספר הכדורים הכולל יורד באחד.

$$p(same\ colour)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}=\frac{11}{20}$$

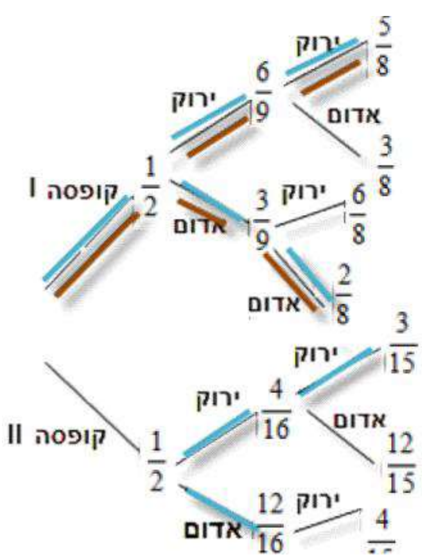
תשובה: ההסתברות להוצאת שני כדורים באותו צבע היא $\frac{11}{20}=0.55$**.**

ב. המאורע "הוצאת שני כדורים בצבעים שונים" הוא

המאורע המשלים ל"הוצאת שני כדורים באותו צבע".

בהתאם, ההסתברות היא $1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}=0.45$**.**

תשובה: ההסתברות להוצאת שני כדורים בצבעים שונים היא $\frac{9}{20}=0.45$ **.**



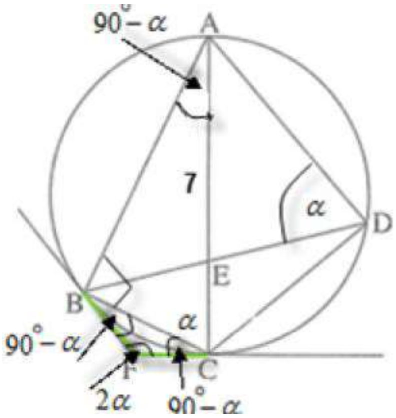
ג. נסמן בעץ בכחול את האפשרויות לשני כדורים באותו צבע,

ובחום את האפשרות שהוצאו מקופסה I **.**

$$p(Box\ \mathrm{I}/\ same\ colour)=\frac{P(Box\ \mathrm{I}\cap same\ colour)}{P(same\ colour)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}}{0.55}$$

$$p(Box\ \mathrm{I}/\ same\ colour)=\frac{0.25}{0.55}=\frac{5}{11}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{5}{11}$**.**



נתונים

1. FB **משיק למעגל בנקודה** B.

2. FC **משיק למעגל בנקודה** C. **3.** $\sphericalangle ABC=90^\circ$.

עבור ב: 4. $BE\cdot DE=21$. **5.** $AE=7$ **ס"מ**.

צ"ל: א. (1) $\sphericalangle ADB+\sphericalangle FBC=90^\circ$. **(2)** $\sphericalangle BFC=2\cdot\sphericalangle ADB$.

ב. (1) $\Delta BEC\sim\Delta AED$. **(2) קוטר המעגל.**

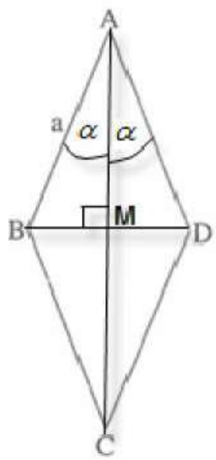
הסבר		טענה	נימוק
	5	$\sphericalangle ADB=\alpha$	סימון
5	6	(ז) $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB=\alpha$	על קשת שווה, $\overset{\frown}{AB}$, זוויות היקפיות שוות
3	7	$\sphericalangle ABC=90^\circ$	נתון
7 ,6	8	$\sphericalangle BAC=90^\circ-\alpha$	סכום זוויות 180° ב- ΔABC
1	9	FB משיק למעגל בנקודה B	נתון
9 ,8	10	$\sphericalangle FBC=\sphericalangle BAC=90^\circ-\alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני
10 ,5	11	$\sphericalangle ADB+\sphericalangle FBC=90^\circ$	חישוב
			מ.ש.ל. א (1)
2	12	FC משיק למעגל בנקודה C	נתון
12 ,9	13	$FB=FC$	שני משיקים למעגל, היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה
13 ,10	14	$\sphericalangle BFC=2\alpha$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ב- ΔFBC וסכום זוויות 180° במשולש זה
14 ,5	15	$\sphericalangle BFC=2\cdot\sphericalangle ADB$	חישוב
			מ.ש.ל. א (2)
	16	(ז) $\sphericalangle AED=\sphericalangle BEC$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
16 ,6	17	$\Delta BEC\sim\Delta AED$	משפט דמיון זווית זווית
			מ.ש.ל. ב (1)
17	18	$\frac{BE}{AE}=\frac{BC}{AD}=\frac{EC}{ED}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
18	19	$BE\cdot DE=AE\cdot EC$	חישוב

הסבר		טענה	נימוק
4	20	$BE \cdot DE = 21$	נתון
5	21	$AE =$ 7 ס"מ	נתון
19, 20, 21	22	$EC =$ 3 ס"מ	חישוב
21, 22	23	$AC =$ 10 ס"מ	סכום קטעים
7	24	AC קוטר המעגל	נשען על זווית היקפית ישרה
23, 24	25	קוטר המעגל הוא 10 ס"מ	
מ.ש.ל. ב(2)			

א. (1) $\sphericalangle BAD = 2\alpha$ **(נתון).** $\sphericalangle BAM = \alpha$ **(האלכסונים חוצי זוויות במעוין).**

$\sphericalangle AMB = 90^\circ$ **(האלכסונים ניצבים זה לזה במעוין).**

במעוין האלכסונים חוצים זה את זה.



$\underline{\Delta ABM}$

$\cos\alpha = \frac{AM}{AB}$

$\boxed{a\cos\alpha = AM}$

$\boxed{AC = 2a\cos\alpha}$

$\underline{\Delta ABM}$

$\sin\alpha = \frac{BM}{AB}$

$\boxed{a\sin\alpha = BM}$

$\boxed{BD = 2a\sin\alpha}$

תשובה: $AC = 2a\cos\alpha$ **,** $BD = 2a\sin\alpha$ **.**

(2) נתון כי $AC \cdot AB = a^2$

$2a\cos\alpha \cdot 2a\sin\alpha = a^2$

$2a^2\sin 2\alpha = a^2 \quad / : 2a^2 > 0$

$\sin 2\alpha = 0.5$

$2\alpha = 30^\circ \quad \leftarrow \sphericalangle BAD < 90^\circ$

$\boxed{\alpha = 15^\circ}$

תשובה: $\alpha = 15^\circ$.

ב. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את ΔABD **הוא** 15 **ס"מ.**

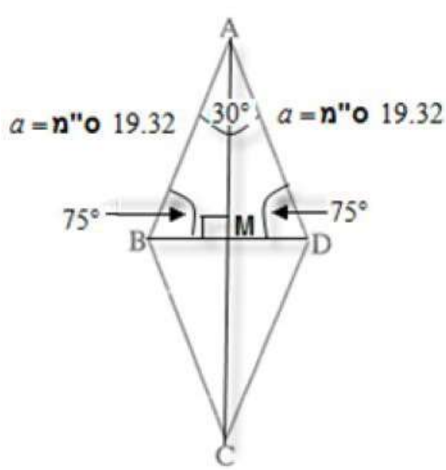
$\sphericalangle ADB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים).**

ΔABD **לפי משפט הסינוסים**

$\frac{AB}{\sin 75^\circ} = 2R$

$a = 2 \cdot 10 \cdot \sin 75^\circ$

$a =$ **ס"מ** 19.32



$S_{\Delta ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\sphericalangle BAD$

$S_{\Delta ABCD} = 19.32^2 \cdot \sin 30^\circ$

$S_{\Delta ABCD} =$ **סמ"ר** 186.6

תשובה: שטח המעוין 186.6 **סמ"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^2}$ **.**

תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

$$x^2 \neq 0$$
$$x \neq 0$$

תשובה: $x \neq 0$ **.**

ב. ארבע הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה).

$f(100)=-0.98 \to -1, \quad f(-100)=-1.02 \to -1,$ **, מסקנה:** $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית.**

$f(0.001)=3001999 \to +\infty, \quad f(-0.001)=2997999 \to +\infty,$ **, מסקנה:** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

ניתן, בצורה זאת, גם לראות כיצד גרף הפונקציה מגיע לאסימפטוטות.

נימוקים אפשריים נוספים:

הביטוי $\dfrac{-x^2+2x+3}{x^2}$ **שואף ל-** $\dfrac{-x^2}{x^2}=-1$ **,**

כאשר x **שואף ל-** $\pm\infty$ **, כי חזקת המכנה (** 2 **) שווה לחזקת המונה (** 2 **),**

$x=0$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=-1$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** x **,** $x=0$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** y **.**

ג. אין חיתוך עם ציר ה- y **על פי תחום ההגדרה.**

$$0=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}$$
$$0=-x^2+2x+3$$
$$x=-1, \quad x=3$$

תשובה: נקודות חיתוך עם ציר ה- x **:** $(-1,0), (3,0)$ **.**

ד. נמצא שיעורי נקודת הקיצון, ונקבע את סוגה.

$$f'(x)=\frac{(-2x+2)\cdot x^2-2x(-x^2+2x+3)}{(x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2x^2+2x^3-4x^2-6x}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x^2-6x}{x^4}}$$

$$-2x^2-6x=0$$

$$\cancel{x=0},\ x=-3\quad\rightarrow\ \boxed{(-3,-1\tfrac{1}{3})}$$

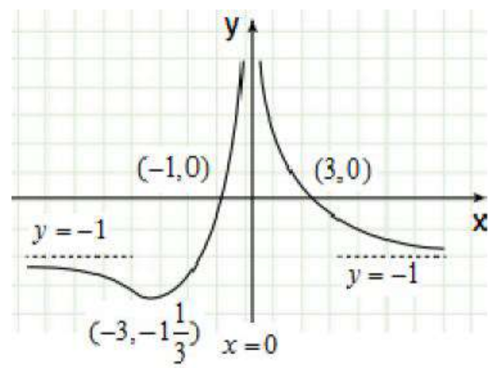
המכנה חיובי, כאשר המונה גרף פרבולה הפוכה ("בוכה"),

העוברת משליליות לחיוביות עבור $x=-3$ ולכן מינימום,

ועוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=-3$ ולכן יורדת בתחום $x>0$.

תשובה: $(-3,-1\frac{1}{3})$ מינימום.

ה. סקיצה של גרף הפונקציה:



ו. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)$. ($g(x)$ והנגזרת שלה באותו תחום הגדרה $x\neq 0$).

למשיקים המקבילים לציר ה- x יש שיפוע 0 - כלומר, $g'(x)=0$.

אולם, $g'(x)=f(x)$ ולכן פתרון המשוואה הוא $x=3$, או $x=-1$, כמו האפסים של $f(x)$.

תשובה: $x=3$, או $x=-1$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+ax+b$ **(** a,b **פרמטרים).**

הישר $y=-2x-1$ **, ששיפועו** -2 **משיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה** $x=-2$ **.**

נציב $x=-2$ **במשוואת המשיק:** $y=-2\cdot(-2)-1=3$ **ושיעורי נקודת ההשקה הם:** $(-2,3)$ **.**

לכן: $f(-2)=3$ **וגם** $f'(-2)=-2$ **כי ערך הנגזרת בנקודת ההשקה שווה לשיפוע המשיק.**

$f'(x)=2x+a$ **. נציב** $f'(-2)=-2$ **:** $-2=2\cdot(-2)+a$ **ומכאן ש-** $a=2$ **.**

נציב $f(-2)=3$ **:** $3=(-2)^2+2\cdot(-2)+b$ **ומכאן ש-** $b=3$ **.**

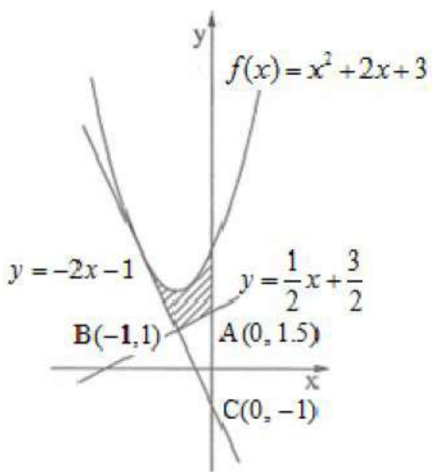
תשובה: $a=2$ **,** $b=3$ **.**

ב. נציב $a=2$ **,** $b=3$ **בתבנית הפונקציה ונקבל ש-** $f(x)=x^2+2x+3$ **.**

נחשב את השטח המבוקש על ידי חיסור שטח ΔABC **,**

מהשטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- y **.**

נחשב את שיעורי הנקודה B **.**



$$\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=-2x-1$$

$$2.5x=-2.5$$

$$x=-1 \quad \to B(-1,1)$$

$$x_A=0 \quad \to A(0,1.5)$$

$$x_C=0 \quad \to C(0,-1)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{(1.5-(-1))\cdot(0-(-1))}{2}=1.25$$

נחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- y **.**

$$S=\int_{-2}^{0}(x^2+2x+3-(-2x-1))\,dx=\int_{-2}^{0}(x^2+2x+3+2x+1)\,dx$$

$$S=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+4x\Big]_{-2}^{0}$$

$$S=(0)-(2\frac{2}{3}) \quad \to \boxed{S=2\frac{2}{3}}$$

וגודל השטח המבוקש: $2\frac{2}{3}-1.25=1\frac{5}{12}$ **.**

תשובה: השטח הוא $1\frac{5}{12}$ **יח"ר.**

א. בציור מוצג גרף של $f(x)$ **בתחום** $1<x<10$.

על פי תחומי עלייה וירידה של הפונקציה, והתחום בו היא קבועה,

ניתן לדעת מתי הנגזרת חיובית, שלילית, או שווה לאפס.

(1) $f'(x)<0$ **כאשר הפונקציה יורדת: עבור** $4<x<6$ **או** $1<x<2$.

(2) $f'(x)>0$ **כאשר הפונקציה עולה: עבור** $6<x<7$ **או** $2<x<4$.

(3) $f'(x)=0$ **כאשר הפונקציה קבועה, או בנקודות הקיצון הפנימיות:**

עבור $7<x<10$ **, או** $x=6$ **, או** $x=4$ **, או** $x=2$.

ב. נתון כי $\int_7^9 k\,dx=8$.

$$8=\int_7^9 k\,dx$$

$$8=k\,x\Big]_7^9$$

$$8=9k-7k$$

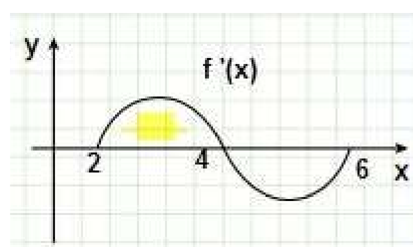
$$8=2k$$

$$k=4 \quad \rightarrow \boxed{f(9)=4}$$

תשובה: $f(9)=4$ **(למעשה, כל ערכי הפונקציה בתחום** $7\le x\le 10$ **הם** 4 **.)**

ג. על פי תחומי החיוביות שליליות של פונקציית הנגזרת, שרשמנו בסעיף א,

ניתן לצייר סקיצה שלה בתחום $2\le x\le 6$ **(כולל צביעת השטח המבוקש לסעיף ד).**



ד. נחשב את השטח המבוקש, המסומן בצהוב,

כאשר, על פי גרף הפונקציה $f(x)$ **הנתון, ידוע כי** $f(2)=1$ **, ו-** $f(4)=4.5$.

$$S=\int_2^4 (f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_2^4$$

$$S=f(4)-f(2)=4.5-1$$

$$\boxed{S=3.5}$$

תשובה: השטח הוא 3.5 **יח"ר.**