א. נסמן ב- x **(קמ"ש) את מהירות הרכיבה של יואב, בין עיר** A **לעיר** B **.**

בהתאם $1.2x$ **היא מהירות הרכיבה של יואב , בין עיר** B **לעיר** C**.**

נסמן ב- t **(קמ"ש) את זמן הרכיבה בין עיר** A **לעיר** B**.**

בהתאם $1.25t$ **הוא זמן הרכיבה של יואב , בין עיר** B **לעיר** C**.**

$s = vt$ **- המרחק** (s) **שווה למהירות** (v) **כפול זמן** (t)

נציב בטבלה המתאימה:

		זמן - t **שעות**	**מהירות -** v **קמ"ש**	**דרך-מרחק -** s **ק"מ**
רכיבה בפועל	**מ-** A **ל-** B	t	x	xt
	מ- B **ל-** C	$1.25t$	$1.2x$	$1.5xt$
רכיבה חלופית (אם)	**מ-** B **ל-** C	6	x	$6x$

המרחק מ- B **לעיר** C **גדול ב-** 40 **ק"מ מהמרחק בין** A **ל-** B **.**

המשוואה המתאימה היא : $1.5xt = xt + 40 \quad \rightarrow 0.5xt = 40 \quad \rightarrow xt = 80$**.**

המרחק מ- B **לעיר** C **שווה, כמובן, בשתי החלופות:**

המשוואה המתאימה היא : $6x = 1.5xt \quad \rightarrow 6x = 1.5 \cdot 80 \quad \rightarrow x = 20$ **.**

תשובה: מהירות הרכיבה של יואב בדרך מ- A **ל-** B **היא** 20 **קמ"ש.**

ב. $xt = 80$ **, ולכן המרחק** AB **הוא** 80 **ק"מ.**

תשובה: המרחק AB **הוא** 80 **ק"מ.**

א. משוואת האלכסון BD **היא** $y=-\frac{1}{3}x$ **.**

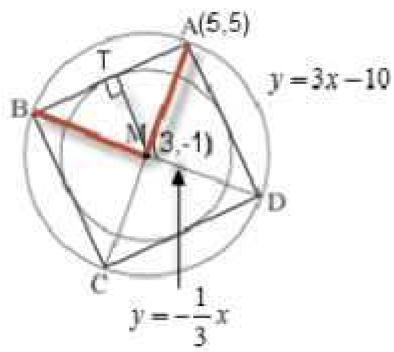
מכיוון ואלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה, אזי $m_{\mathrm{AC}}=3$

(תנאי לישרים מאונכים, שאינם מקבילים לצירים, שיפועים הופכיים ונגדיים).

$$\mathrm{A}(5,5) \quad , \quad m=3$$
$$y-5=3(x-5)$$
$$\boxed{y=3x-10}$$

תשובה: משוואת האלכסון AC **היא** $y=3x-10$ **.**

ב. נמצא את שיעורי מרכז המעגל.



$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x \\ y=3x-10 \end{cases}$$
$$-\frac{1}{3}x=3x-10$$
$$-3\frac{1}{3}x=-10$$
$$x=3 \quad \rightarrow y=-\frac{1}{3}\cdot 3=-1 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{M}(3,-1)}$$

נמצא את רדיוס המעגל.

$$\mathrm{R}=\sqrt{(5-3)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{40}$$

תשובה: משוואת המעגל החוסם את הריבוע היא $(x-3)^2+(y+1)^2=40$ **.**

ג. משפט פיתגורס ב- $\Delta\mathrm{MAB}$ **, משולש ישר זווית ושווה שוקיים, כי אלכסוני הריבוע שווים וחוצים זה את זה.**

A **:** $(\mathrm{AB})^2=40+40=80 \quad \rightarrow \mathrm{AB}=\sqrt{80}$ **.**

תשובה: אורך צלע הריבוע הוא $\sqrt{80}$**.**

ד. רדיוס המעל החסום בריבוע, לדוגמא MT **,**

מאונך לצלע הריבוע והוא תיכון ליתר ב- ב- $\Delta\mathrm{MAB}$ **, ולכן אורכו** $\sqrt{20}=\sqrt{\frac{80}{4}}=\frac{\sqrt{80}}{2}$**.**

תשובה: רדיוס המעגל החסום בריבוע הוא $\sqrt{20}$**.**

א. שחר קנה קופסה, שבה 4 כדורי טניס צהובים ו- 6 כדורים ירוקים – סה"כ 10 כדורי טניס.
נשים לב ששחר מוציא כדורים ללא החזרה (ולכן אין התפלגות בינומית ואין שימוש בנוסחת ברנולי).

(1) ההסתברות להוצאת 3 כדורים צהובים היא: $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$.

תשובה: ההסתברות להוצאת 3 כדורים צהובים היא $\frac{1}{30}$.

(2) ההסתברות להוצאת 3 כדורים באותו צבע היא: $p(3\ yellow\ balls)+p(3\ green\ balls)=\frac{1}{30}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{5}$ **.**

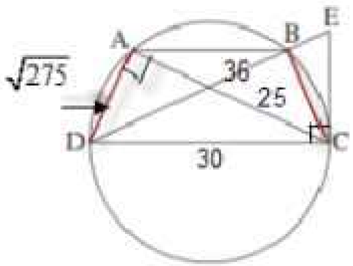
תשובה: ההסתברות להוצאת 3 כדורים באותו צבע היא $\frac{1}{5}$.

ב. דנה קנתה 3 קופסאות, כאשר בכול אחת 4 כדורי טניס צהובים ו- 6 כדורים ירוקים
– סה"כ 10 כדורי טניס, בכל קופסה.
דנה מוציאה כדור אחד מכל קופסה.

(1) ההסתברות להוצאת 3 כדורים צהובים היא: $\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=0.064$.

תשובה: ההסתברות להוצאת 3 כדורים צהובים היא 0.064 .

(2) נחשב, תחילה, את ההסתברות לאי הוצאת כדור ירוק בכלל (כלומר, הוצאת 3 כדורים צהובים)
- שהיא על פי תת סעיף ב(1) 0.064.
לכן, ההסתברות להוצאת כדור ירוק אחד לפחות (המאורע המשלים) היא $1-0.064=0.936$.
תשובה: ההסתברות להוצאת 3 כדורים באותו צבע היא 0.936 .



<u>נתונים</u>

1. $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים 2.** $ABCD$ **חסום במעגל**

3. EC **משיק ב-** C **4.** CD **קוטר**

עבור ב: 5. 25 **ס"מ** $AC=$ **6.** 36 **ס"מ** $DE=$

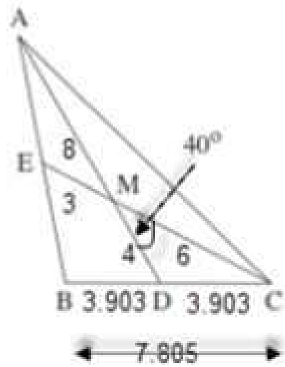
צ"ל: א. $\Delta DAC \sim \Delta ECD$ **ב. רדיוס המעגל ג.** $S_{\Delta DAC}$

הסבר		טענה	נימוק
4	7	CD קוטר	נתון
3	8	EC משיק ב- C	נתון
7	9	$\sphericalangle DAC=90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
8	10	$\sphericalangle ECD=90°$	המשיק מאונך לקוטר בנקודת ההשקה
9, 10	11	$\sphericalangle ECD=\sphericalangle DAC$ (ז)	כלל המעבר
1	12	$ABCD$ טרפז שווה שוקיים	נתון
7	13	$DC>AB$	הקוטר הוא המיתר הגדול במעגל
12, 13	14	$BC=AD$	שוקי הטרפז השווים זה לזה
14	15	$\sphericalangle EDC=\sphericalangle ACD$ (ז)	מול מיתרים שווים, נשענות זוויות היקפיות שוות, הנמצאות מאותם צדדים של המיתרים
11, 15	16	$\Delta DAC \sim \Delta ECD$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
16	17	$\frac{DA}{EC}=\frac{DC}{ED}=\frac{AC}{CD}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
5	18	$AC=$ ס"מ 25	נתון
6	19	$DE=$ ס"מ 36	נתון
17, 18, 19	20	$DC=\sqrt{36\cdot 25}=$ ס"מ 30	חישוב
7, 20	21	רדיוס המעגל הוא 15 ס"מ	הקוטר שווה לסכום שני רדיוסים
		מ.ש.ל. ב	
9, 18, 20	22	$DE=$ ס"מ $\sqrt{275}$	משפט פיתגורס ΔDAC
9, 18, 22	23	$S_{\Delta DAC}=\frac{25\cdot\sqrt{275}}{2}=$ סמ"ר 207.3	נוסחת שטח משולש
		מ.ש.ל. ג	

א. $AD=12$ **ס"מ** **תיכון (נתון),** $CE=9$ **ס"מ** **תיכון (נתון).** $\sphericalangle CMD=40^\circ$ **(נתון).**

התיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ **מהקדקוד.**

לכן: $AM=8$ **ס"מ**, $MD=4$ **ס"מ**, $CM=6$ **ס"מ**, $EM=3$ **ס"מ.**



ב. $\underline{\Delta CMD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

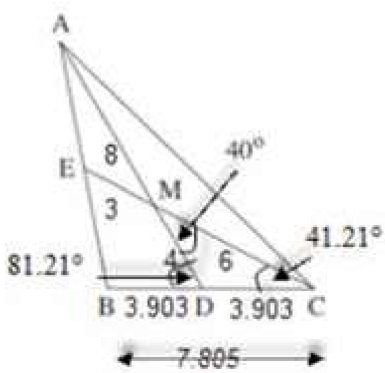
$$(CD)^2=(CM)^2+(MD)^2-2\cdot CM\cdot MD\cdot\cos\sphericalangle CMD$$
$$(CD)^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 40^\circ$$
$$(CD)^2=15.23$$
$$CD=3.903 \text{ ס"מ}$$

הנקודה M **היא אמצע הצלע, ולכן:** $BC=2\cdot 3.903=7.805$ **ס"מ** **(וגם** $BD=3.903$ **ס"מ).**

תשובה: $BC=7.805$ **ס"מ.**

ג. $\underline{\Delta CMD}$ **לפי משפט הקוסינוסים (ניתן משפט סינוסים, אולם נקבל שתי אפשרויות ונצטרך לבחור.)**

$$(MD)^2=(CM)^2+(CD)^2-2\cdot CM\cdot CD\cdot\cos\sphericalangle MCD$$
$$4^2=6^2+3.903^2-2\cdot 6\cdot 3.903\cdot\cos\sphericalangle MCD$$
$$16=51.23-46.836\cos\sphericalangle MCD$$
$$\cos\sphericalangle MCD=\frac{35.23}{46.83}$$
$$\sphericalangle MCD=41.21^\circ$$



תשובה: $\sphericalangle MCD=41.21^\circ$.

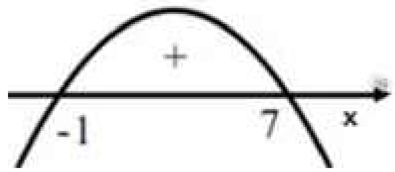
ד. $\sphericalangle MDB=41.21^\circ+40^\circ=81.21^\circ$ **(זווית חיצונית למשולש).**

$$S_{\Delta ADB}=\frac{AD\cdot BD\cdot\sin\sphericalangle MDB}{2}$$
$$S_{\Delta ADB}=\frac{12\cdot 3.903\cdot\sin 81.21^\circ}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta ADB}=23.14cm^2}$$

תשובה: $S_{\Delta ADB}=23.14$ **סמ"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+6x+7}$

הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.



$$-x^2+6x+7\ge 0$$
$$x=7,\ x=-1$$

מתקבל ביטוי שהגרף שלו הוא פרבולה הפוכה (בוכה).

תשובה: תחום ההגדרה: $-1\le x\le 7$ **.**

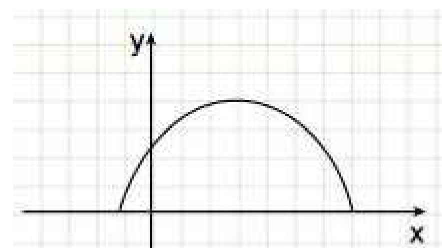
ב. נקודות קצה: $(7,0)$ **,** $(-1,0)$ **.**

$$f'(x)=\frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x+7}}$$
$$0=-2x+6$$
$$x=3\quad\rightarrow y=\sqrt{-3^2+6\cdot 3+7}=4\quad\rightarrow(3,4)$$

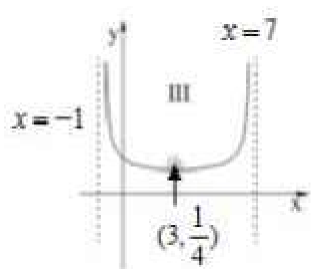
ועל פי ערכי הפונקציה בקצוות ניתן לקבוע את סוגי הקיצון.

תשובה: $(3,4)$ **מקסימום מוחלט,** $(7,0)$ **,** $(-1,0)$ **מינימום מוחלט.**

ג. הסקיצה המתאימה.



ד. נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$



(1) הפונקציה מוגדרת כמו $f(x)$ **, למעט במקרים שבהם** $f(x)=0$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $-1<x<7$ **.**

(2) הסקיצה המתאימה של $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ **מתוארת בגרף** III **.**

(א) כאשר $x=-1$ **או** $x=7$ **, מכנה הפונקציה מתאפס, ולא המונה, ויש שתי אסימפטוטות אנכיות.**

(ב) $f(x)$ **אי-שלילית, ולכן** $g(x)$ **חיובית לכל** x **(הרי בתחום ההגדרה של** $g(x)$ **קבענו כי** $f(x)$ **אינה אפס).**

(ג) $g'(x)=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$ **, כלומר הנגזרת מתאפסת עבור** $x=3$ **, אולם תחומי עלייה וירידה מתהפכים.**

כאשר $x=3$ **, נקבל מינימום מוחלט בנקודה** $(3,\frac{1}{4})$ **, ואומנם** $g(x)$ **חיובית תמיד.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 1$ **.**

ב. נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $\boxed{(0,2)} \leftarrow 2=\dfrac{2-0}{(0-1)^2}=f(0)$

$$f(0)=\frac{2-0}{(0-1)^2}=2 \quad \rightarrow \boxed{(0,2)}$$

ציר x **:** $y=0$ **-**

$$0=2-x \quad \rightarrow x=2 \quad \rightarrow \boxed{(2,0)}$$

תשובה: $(0,2)$ **,** $(2,0)$ **.**

ג. נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

אסימפטוטות מאונכת לציר ה- x **: הישר** $x=1$ **(מספר זה מאפס מכנה ולא מונה).**

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y **:** $y=0$ **(חזקת מונה (1) קטנה מחזקת מכנה (2)).**

תשובה: $x=1$ **,** $y=0$ **.**

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{-1(x-1)^2-(2-x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[-(x-1)-2(2-x)\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)(-x+1-4+2x)}{(x-1)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}}$$

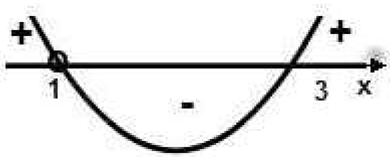
$$x=3 \quad \rightarrow y=\frac{2-3}{(3-1)^2}=-0.25 \quad \rightarrow (3,-0.25)$$

$x=1$ **אינו בתחום ההגדרה.**

הביטוי במונה הוא של פרבולה ישרה,

וסימניה קובעים את סימן הנגזרת.

נצייר את גרף סימני הנגזרת (מכנה הנגזרת חיובי).

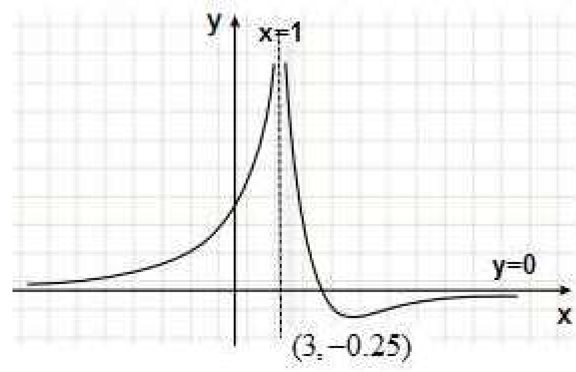


נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה

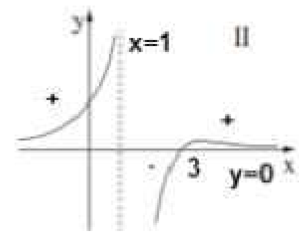
x		3		1	
$f'(x)$	+	0	-		+
מסקנה	↗	Min	↘		↗

תשובה: עלייה: $x>3$ **או** $x<1$ **, ירידה:** $1<x<3$ **(** $(3,-0.25)$ **מינימום).**

ה. הסקיצה המתאימה.



ו. הסקיצה המתאימה של $f'(x)$ מתוארת בגרף II .



(1) כאשר $x=1$, יש גם לגרף הנגזרת אסימפטוטה אנכית.

(2) $y=0$ גם אסימפטוטה אופקית של גרף הנגזרת (חזקת מונה (2) קטנה מחזקת מכנה (4)).

(3) סימני הנגזרת תואמים את טבלת העלייה והירידה שבסעיף ד.

(4) נשים לב שקיים x חיובי $(x=3)$, הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות ויש מינימום לפונקציה המקורית.

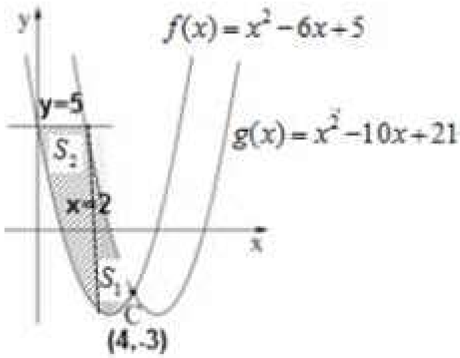
א. נתון $f(x)=x^2-6x+5$ **,** $g(x)=x^2-10x+a$ **.**

שיעור ה- x **של הנקודה** C **, נקודת החיתוך בין שני הגרפים, הוא** 4 **.**

$f(4)=4^2-6\cdot4+5=-3 \quad \to \mathrm{C}(4,-3)$ **.**

נציב $\mathrm{C}(4,-3)$ **ב-** $g(x)$ **:** $-3=4^2-10\cdot4+a \quad \to \boxed{a=21}$

תשובה: $a=21$ **.**



ב. $g(x)=x^2-10x+21$ **חותכת את ציר ה-** y **בנקודה** $(0,21)$ **.**

$f(x)=x^2-6x+5$ **חותכת את ציר ה-** y **בנקודה** $(0,5)$ **.**

מכאן ש- $f(x)$ **היא הפונקציה השמאלית,**

ומשוואת הישר המקביל היא $y=5$ **.**

נחלק את השטח המבוקש לשני שטחים.

$$5=x^2-10x+21$$
$$0=x^2-10x+16$$
$$x=2,\ x=8$$

ו- $x=2$ **הוא שיעור ה-** x **של נקודת החיתוך, השמאלית, בין** $y=5$ **לבין** $g(x)=x^2-10x+21$ **.**

$$S_1=\int_2^4 (x^2-10x+21-(x^2-6x+5))\,dx$$
$$S_1=\int_2^4 (x^2-10x+21-x^2+6x-5)\,dx$$
$$S_1=\int_2^4 (-4x+16)\,dx$$
$$S_1=\frac{-4x^2}{2}+16x\Big]_2^4$$
$$S_1=(-2\cdot4^2+16\cdot4)-(-2\cdot2^2+16\cdot2)$$
$$S_1=(32)-(24)$$
$$\boxed{S_1=8}$$

$$S_2=\int_0^2 (5-(x^2-6x+5))\,dx$$
$$S_2=\int_0^2 (5-x^2+6x-5)\,dx$$
$$S_2=\int_0^2 (-x^2+6x)\,dx$$
$$S_2=\frac{-x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\Big]_0^2$$
$$S_2=(\frac{-2^3}{3}+3\cdot2^2)-(\frac{-0^3}{3}+3\cdot0^2)$$
$$S_2=(9\frac{1}{3})-(0)$$
$$\boxed{S_2=9\frac{1}{3}}$$

וגודל השטח המבוקש: $9\frac{1}{3}+8=17\frac{1}{3}$ **.**

תשובה: השטח הוא $17\frac{1}{3}$ **יח"ר.**