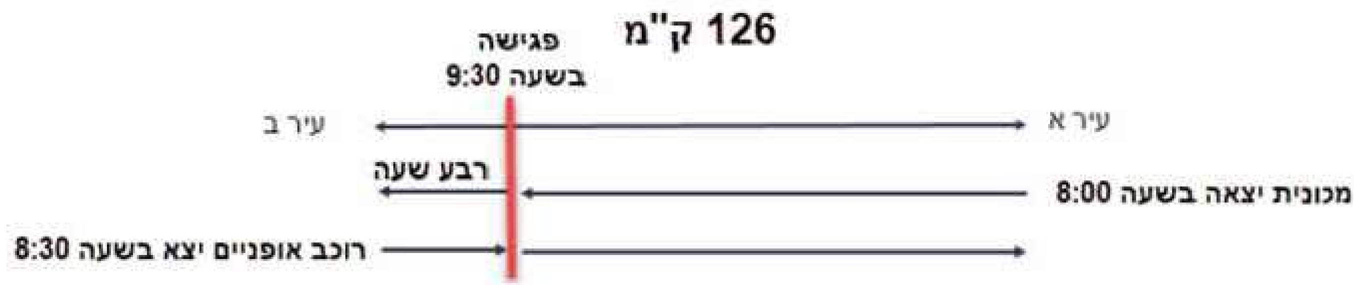
א. נסמן את מהירות הנסיעה של המכונית ב- x **(קמ"ש) .**

נסמן את מהירות הנסיעה של רוכב האופניים ב- y **(קמ"ש) .**



		זמן (שעות)	מהירות (ק"מ לשעה)	דרך-מרחק (ק"מ)
מהתחלה	**מכונית**	1.5	x	$1.5x$
עד המפגש	**רוכב אופניים**	1	y	y
מהמפגש עד עיר ב	**מכונית**	$\frac{15}{60}=0.25$	x	$0.25x$

עד המפגש עברו כלי הרכב 126 **ק"מ ביחד. המשוואה המתאימה:** $1.5x+y=126$**.**

לאחר המפגש עברה המכונית את המרחק, שעבר רוכב האופניים לפני המפגש. המשוואה המתאימה: $y=0.25x$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases}1.5x+y=126\\ y=0.25x\end{cases}$$

$$1.5x+0.25x=126$$

$$1.75x=126 \quad /:1.75$$

$$\boxed{x=72} \quad \rightarrow y=0.25\cdot 72 \quad \rightarrow \boxed{y=18}$$

תשובה: מהירות המכונית הייתה 72 **קמ"ש, ומהירות האופנוע הייתה** 18 **קמ"ש.**

ב. נבנה טבלה מעודכנת, עבור סעיף ב.

		זמן (שעות)	מהירות (ק"מ לשעה)	דרך-מרחק (ק"מ)
מהתחלה עד המפגש	**מכונית**	t	$72+a$	$t\left(72+a\right)$
	רוכב אופניים	t	$18-a$	$t(18-a)$

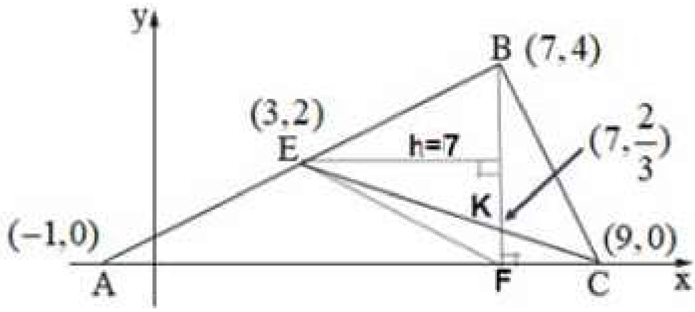
עד המפגש עברו כלי הרכב 126 **ק"מ ביחד. המשוואה המתאימה:** $t\left(72+a\right)+t(18-a)=126$ **.**

נמצא את t **.**

$$t\left(72+a\right)+t(18-a)=126$$
$$72t+ta+18t-ta=126$$
$$90t=126 \quad /:90$$
$$\boxed{t=1.4}$$

תשובה: $t=1.4$ **.**

א. CE **הוא תיכון לצלע** AB**. נמצא את שיעורי הנקודה** E**, באמצעות נוסחת אמצע קטע.**



$$E\left(\frac{-1+7}{2},\frac{0+4}{2}\right) \rightarrow \boxed{E(3,2)}$$

תשובה: $E(3,2)$.

ב. נתון $EB=BC$ **,** $x_C > x_B$**. נסמן** $C(x,0)$.

$$\sqrt{(3-7)^2+(2-4)^2}=\sqrt{(7-x)^2+(4-0)^2}$$
$$20=(7-x)^2+16$$
$$4=(7-x)^2$$
$$2=7-x \quad \rightarrow x=5 \quad not\ o.k. \quad x_C < x_B$$
$$-2=7-x \quad \rightarrow x=9 \quad o.k. \quad x_C > x_B$$

תשובה: $C(9,0)$.

ג. (1) נמצא, תחילה, את משוואת התיכון CE .

$m_{EC}=\frac{2-0}{3-9}=-\frac{1}{3}$.

משוואת התיכון CE**, על פי השיפוע והנקודה** $C(9,0)$ **היא:** $y-0=-\frac{1}{3}(x-9) \quad \rightarrow y=-\frac{1}{3}x+3$.

שיעורי הנקודה K **, כאשר** $x_K=x_B=7$ **, הם:** $\boxed{K(7,\frac{2}{3})} \leftarrow y=-\frac{1}{3}\cdot 7+3=\frac{2}{3}$.

$KF=y_K-y_F=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$.

תשובה: $K(7,\frac{2}{3})$ **,** $KF=\frac{2}{3}$.

(2) נחשב את שטח משולש EKF.

$$S_{\Delta EKF}=\frac{KF\cdot h_{KF}}{2}=\frac{\frac{2}{3}\cdot(7-3)}{2}=1\frac{1}{3}$$

תשובה: $S_{\Delta EKF}=1\frac{1}{3}$.

א. בסל יש 2 תפוחים, מתוך n פירות.

אם טל הוציאה תפוח אחד, נשאר 1 תפוח, מתוך $n-1$ פירות.

נתון שההסתברות שהיא הוציאה שני תפוחים היא $\frac{1}{36}$.

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{36}$$

$$\frac{2}{n(n-1)}=\frac{1}{36} \quad /\cdot 36n(n-1)$$

$$72=n(n-1)$$

$$0=n^2-n-72$$

$$0=(n-9)(n+8)$$

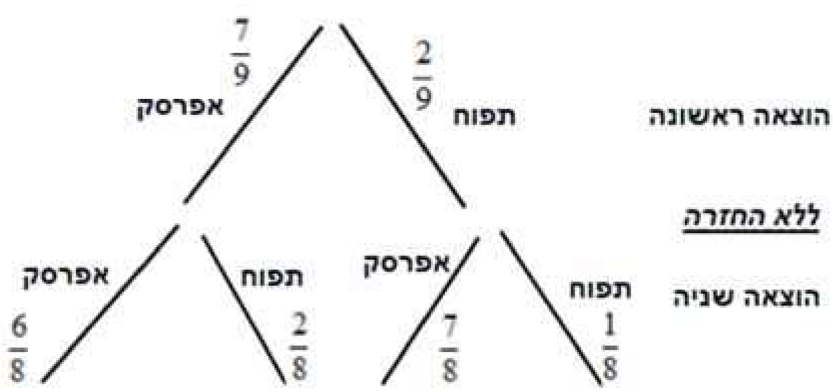
$$\boxed{n=9} \quad o.k.$$

$$n=-8 \quad not\ o.k. \quad \leftarrow n\ natural$$

מכאן שבסל היו 2 תפוחים, מתוך 9 פירות, ולכן היו 7 אפרסקים.

תשובה: בסל היו 7 אפרסקים, לפני שטל הוציאה ממנו פירות.

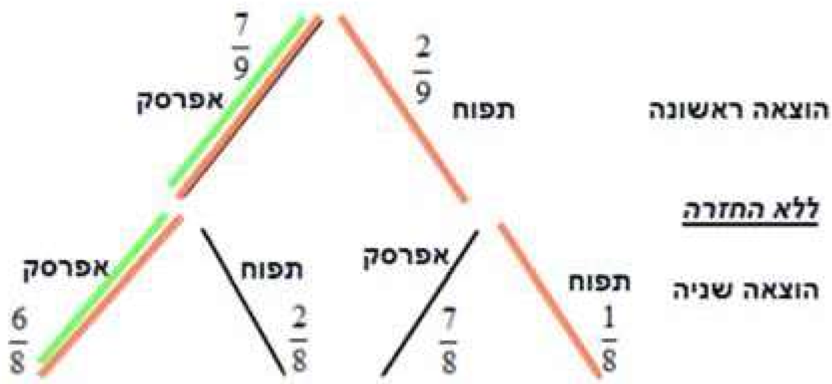
ב. נעלה את הנתונים על עץ אפשרויות.



ההסתברות שהפרי השני, שהוציאה טל, היה תפוח – היא: $P=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$.

תשובה: ההסתברות היא $\frac{2}{9}$.

ג. נסמן באדום, בעץ האפשרויות, את המסלולים להוצאת שני פירות מאותו הסוג.



ההסתברות שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו סוג היא: $P=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{11}{18}$ **.**

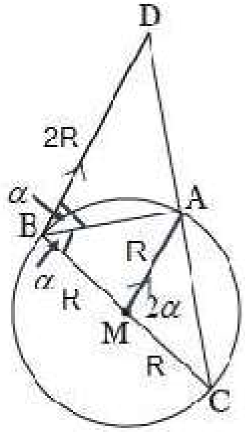
תשובה: ההסתברות היא $\frac{11}{18}$**.**

ב. ידוע שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו סוג.

יש לחשב את ההסתברות שהיא הוציאה שני אפרסקים. זה החלק של המסלול הירוק מבין המסלולים האדומים.

$$\mathrm{P}(2\ peaches\ /\ same\ kind\ of\ \ fruits)=\frac{\mathrm{P}(2\ peaches\cap same\ kind\ of\ \ fruits)}{\mathrm{P}(same\ kind\ of\ \ fruits)}=\frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{11}{18}}=\frac{21}{22}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{21}{22}$ **.**



נתונים

1. M **מרכז המעגל 2.** R **רדיוס המעגל 3.** BC **קוטר 4.** $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$.

עבור ד. 5. ΔABM **שווה צלעות.**

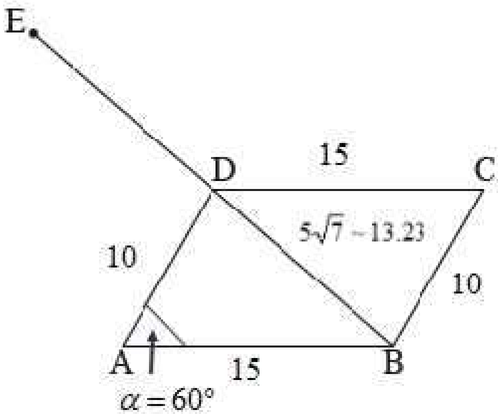
צ"ל: א. $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ABC$ **. ב.** $\Delta CBD \sim \Delta CMA$.

ג. MA **קטע אמצעים ב-** ΔDBC **. ד.** $S_{\Delta CBD}$.

הסבר		טענה	נימוק
1	6	M **מרכז המעגל**	**נתון**
	7	$\sphericalangle AMC = 2\alpha$	**סימון של זווית מרכזית**
7 ,4	8	$\sphericalangle DBA = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC = \alpha$	**נתון וחישוב**
7	9	$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC = \alpha$	**זווית היקפית שווה לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (** $\overset{\frown}{AC}$)
9 ,8	10	$\sphericalangle DBA = \sphericalangle ABC$	**כלל המעבר**
		מ.ש.ל. א	
9 ,8	11	$\sphericalangle CBD = 2\alpha$	**סכום זוויות**
11 ,7	12	$\sphericalangle CBD = \sphericalangle AMC$ **(ז)**	**כלל המעבר**
	13	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle MCA$ **(ז)**	**זווית משותפת**
13 ,12	14	$\Delta CBD \sim \Delta CMA$	**משפט דמיון זווית זווית**
		מ.ש.ל. ב	
12	15	$MA \parallel BD$	**אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים**
6 ,4	16	$BM = MC$	**רדיוסים שווים במעגל**
16 ,15	17	MA **קטע אמצעים ב-** ΔDBC	**יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול**
		מ.ש.ל. ג	
5	18	ΔABM **שווה צלעות**	**נתון**
18	19	$\alpha = 60°$	**זוויות שוות ל-** $60°$ **במשולש שווה צלעות**
19 ,11	20	$\sphericalangle CBD = 120°$	**הצבה**
2	21	$MA = R$	**נתון**
21 ,17	22	$BD = 2R$	**קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע שממול**
3 ,2	23	$BC = 2R$	**נתון**
23 ,22 ,20	24	$S_{\Delta CBD} = \frac{2R \cdot 2R \cdot \sin 120}{2} = R^2\sqrt{3}$	**נוסחת שטח משולש**
		מ.ש.ל. ג	

א. $ABCD$ **מקבילית.**

האלכסון במקבילית מחלק אותה לשני משולשים שווי שטח (משולשים חופפים).



$$S_{\Delta BAD} = \frac{15 \cdot 10 \cdot \sin\alpha}{2} \rightarrow S_{\Delta BAD} = 75\sin\alpha$$

תשובה: $S_{\Delta BAD} = 75\sin\alpha$.

ב. נתון $S_{ABCD} = 75\sqrt{3}$ **, לכן** $S_{\Delta BAD} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{75\sqrt{3}}{2} = 75\sin\alpha \quad / : 75$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\alpha = 60°} \quad \leftarrow \alpha < 90°$$

תשובה: $\alpha = 60°$.

ג. ΔABD **על פי משפט הקוסינוסים:**

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$$

$$(BD)^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60°$$

$$(BD)^2 = 175$$

$$\boxed{BD = 5\sqrt{7} \sim 13.23}$$

תשובה: $BD = 5\sqrt{7} \sim 13.23$.

ד. (1) נחשב את גודל $\sphericalangle ABE$ **.**

ΔABD **על פי משפט הסינוסים:**

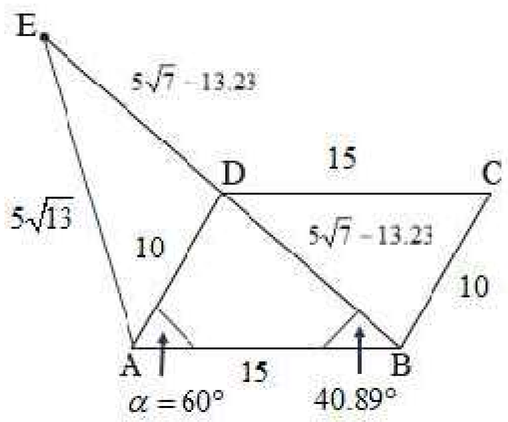
$$\frac{AD}{\sin\sphericalangle ABE}=\frac{BD}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{10\sin 60^\circ}{5\sqrt{7}}=\sin\sphericalangle ABE$$

$$\boxed{\sphericalangle ABE=40.89^\circ} \qquad \cancel{\sphericalangle ABE=139.11^\circ}$$

האפשרות השנייה נפסלה, עקב סכום זוויות ב- ΔABD **הוא** 180° **.**

תשובה: $\sphericalangle ABE=40.89^\circ$ **.**



(2) $ED=BD=5\sqrt{7}\sim 13.23$, **ולכן** $EB=10\sqrt{7}$ **.**

ΔABE **על פי משפט הקוסינוסים:**

$$(AE)^2=(AB)^2+(EB)^2-2\cdot AB\cdot EB\cdot\cos 40.89^\circ$$

$$(AE)^2=(15)^2+(10\sqrt{7})^2-2\cdot 15\cdot 10\sqrt{7}\cdot\cos 40.89^\circ$$

$$(AE)^2=325$$

$$\boxed{AE=5\sqrt{13}}$$

ΔABE **על פי משפט הסינוסים:**

$$\frac{AE}{\sin\sphericalangle ABE}=2R$$

$$\frac{5\sqrt{13}}{2\sin 40.89^\circ}=R$$

$$\boxed{R=13.77}$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את ΔABE **הוא** 13.77**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$.

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס. לכן, $(x-3)^2\neq 0 \quad \to x-3\neq 0 \quad \to \boxed{x\neq 3}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 3$ **.**

(2) במחובר השמאלי: חזקת המונה (0 **) קטנה מחזקת המכנה (** 2 **), ולכן** $\frac{1}{(x-3)^2}\to 0$ **עבור** $x\to\pm\infty$ **.**

מכאן ש- $y=0+4=4$ **אסימפטוטה אופקית.**

אסימפטוטה אנכית: $x=3$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=4$ **,** $x=3$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון, ואת סוגן.

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-2\cdot(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2(x-3)}{(x-3)^4}}$$

מכנה הנגזרת חיובי.

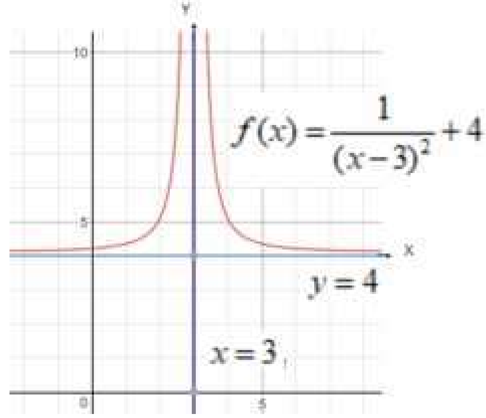
המונה מתאפס עבור $x=3$ **שלא בתחום ההגדרה,**

עבור $x=4$ **, נקבל** $f'(4)=\frac{-2(4-3)}{+}<0$ **, והפונקציה יורדת.**

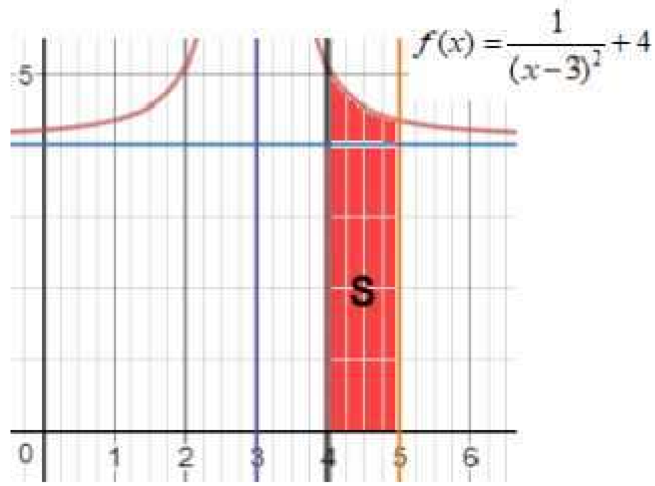
עבור $x=2$ **, נקבל** $f'(2)=\frac{-2(2-3)}{+}>0$ **, והפונקציה עולה.**

תשובה: עלייה: $x<3$ **, ירידה:** $x>3$ **.**

(4) הסקיצה המתאימה:



ב. נחשב את השטח הצבוע באדום.



$$S=\int_4^5\left(\frac{1}{(x-3)^2}+4-0\right)dx$$

$$S=\int_4^5\left((x-3)^{-2}+4\right)dx$$

$$S=\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+4x\Big]_4^5=-\frac{1}{x-3}+4x\Big]_4^5$$

$$x=5:\quad 19.5$$

$$x=4:\quad 15$$

$$\boxed{S=19.5-15=4.5}$$

תשובה: השטח הוא 4.5 **יח"ר.**

ג. נתון כי $g(x)=f(x)-4$ **.**

$g(x)=f(x)-4$ **היא הזזה אנכית כלפי מטה, ב-** 4 **יחידות, של** $f(x)$ **.**

בתחום $4\le x\le 5$ **, גם** $f(x)$ **וגם** $g(x)$ **מעל ציר ה-** x **, כי** $f(x)>4$ **בתחום.**

ההורדה כלפי מטה, מקטינה את השטח שחשבנו בגודלו של מלבן, שממדיו $4\times 1=4\times(5-4)$ **.**

ולכן השטח שבין $g(x)$ **לבין ציר ה-** x **קטן ב-** 4 **יחידות שטח, והוא:** $4.5-4=0.5$ **.**

תשובה: השטח הוא 0.5 **יח"ר.**

ניתן, כמובן גם לחשב את השטח, בעזרת אינטגרל.

$$S=\int_4^5\left(\frac{1}{(x-3)^2}+4-4\right)dx=\int_4^5\left((x-3)^{-2}+4\right)dx=\frac{(x-3)^{-1}}{-1}\Big]_4^5=-\frac{1}{x-3}\Big]_4^5$$

$$x=5:\quad -0.5\qquad x=4:\quad -1\qquad \to \boxed{S=-0.5-(-1)=0.5}$$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\sqrt{x+a}$ (a פרמטר).

הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$$x+a\ge 0$$

$$\boxed{x\ge -a}$$

תשובה: תחום ההגדרה: $x\ge -a$.

א. הנקודה $(2,24)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

$$24=2^3\sqrt{2+a} \quad /:8$$

$$3=\sqrt{2+a} \quad (\,)^2$$

$$9=2+a$$

$$\boxed{a=7} \quad 3=\sqrt{2+7} \quad \to 3=3 \quad o.k.$$

תשובה: $a=7$.

א. נציב $a=7$ ונקבל: $f(x)=x^3\sqrt{x+7}$ (תחם ההגדרה $x\ge -7$).

(1) בציר ה- x מתקיים $y=0$.

$$0=x^3\sqrt{x+7}$$

$$x^3=0 \quad \to x=0 \quad \to \boxed{(0,0)}$$

$$\sqrt{x+7}=0 \quad \to x=-7 \quad \to \boxed{(-7,0)}$$

וקבלנו גם את נקודת החיתוך עם ציר ה- y , $(0,0)$.

תשובה: $(0,0)$, $(-7,0)$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

נשים לב ש: $(-7,0)$ **תהייה נקודת קיצון בקצה.**

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+\frac{x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2(x+7)+x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^3+42x^2+x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{7x^2(x+6)}{2\sqrt{x+7}}}$$

$$7x^2(x+6)=0$$

$$x=0 \quad \rightarrow (0,0)$$

$$x=-6 \quad \rightarrow (-6,-216)$$

נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה, על פי ערכי הפונקציה והנגזרת.

נשים לב שהמכנה חיובי (עבור $x>-7$ **), והביטוי** $7x^2$ **חיובי (עבור** $x>-7, x\neq 0$ **) .**

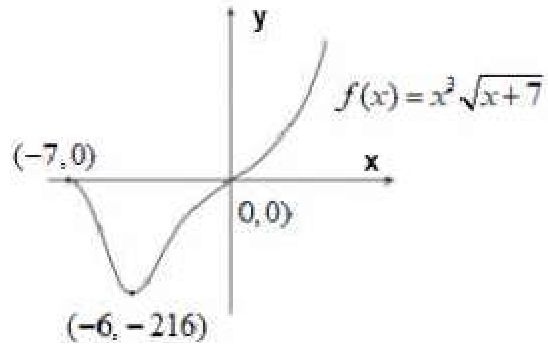
$$f'(-6.5)=\frac{+(-6.5+7)}{+}<0 \quad , \quad f'(-5)=\frac{+(-5+7)}{+}>0 \quad , \quad f'(1)=\frac{+(1+7)}{+}>0$$

x	-7		-6		0		
$f(x)$	0		-216		0		
$f'(x)$		-	0	+		+	
מסקנה	Max	↘	Min	↗	**פיתול**	↗	

הנקודה $(0,0)$ **אינה נקודת קיצון (נקראת נקודת פיתול).**

תשובה: $(-6,-216)$ **מינימום ,** $(-7,0)$ **מקסימום.**

(3) הסקיצה המתאימה.



הערה – בראשית הצירים, ערך הנגזרת הוא 0, והמשיק (במקרה זה) הוא ציר ה- x .

(4) על פי הסרטוט.

תשובה: חיוביות: $x>0$, שליליות: $-7<x<0$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ (c פרמטר), תזוזה אנכית של $f(x)$.

אם $g(x)=f(x)+256$, אז נקודת המינימום שלה תהייה $(-6,0)$, והגרף ישיק לציר ה- x .

על פי ההערה בתת-סעיף ג(3), גם עבור $g(x)=f(x)+0$ הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה $(0,0)$.

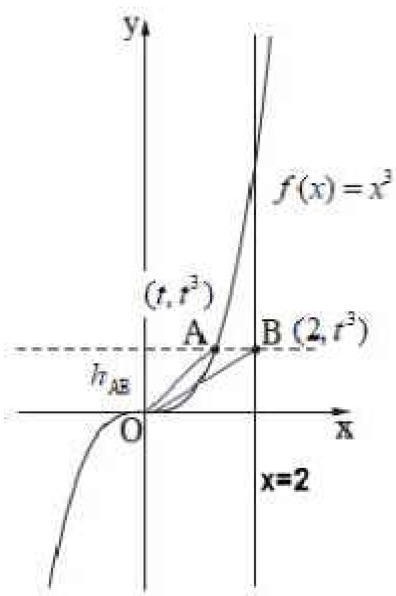
תשובה: $c=256$, $c=0$.

א. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא שטח המשולש ABO **.**

נסמן $A(t, t^3)$ **נקודה על גרף הפונקציה** $f(x)=x^3$ **בתחום** $0<t<2$ **.**

AB **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_B=y_A=t^3$ **, ו-** $B(2, t^3)$ **.**

$AB=x_B-x_A=2-t^3$ **, ואורך הגובה החיצוני לצלע זו הוא** $h_{AB}=t^3-0=t^3$ **.**



$$S_{\Delta ABO}=\frac{AB\cdot h_{AB}}{2}$$

$$S_{\Delta ABO}=\frac{(2-t)\cdot t^3}{2}$$

$$S_{\Delta ABO}=\frac{2t^3-t^4}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABO}=t^3-0.5t^4}$$

$$\boxed{S'=3t^2-2t^3}$$

$$0=3t^2-2t^3$$

$$0=t^2(3-2t)$$

$$\cancel{t=0},\ t=1.5 \quad \leftarrow 0<t<2$$

$$s'(1)=1>0\ ,\ s'(2)=-4<0 \quad \rightarrow Max$$

תשובה: $A(1.5, 3.375)$ **, עבורה שטח המשולש** ABO **מקסימלי.**

ב. נציב $t=1.5$ **בפונקציית השטח:** $S(1.5)=1.5^3-0.5\cdot 1.5^4=\frac{27}{32}$ **.**

תשובה: השטח המקסימלי של ABO **הוא** $\frac{27}{32}$ **יח"ר.**