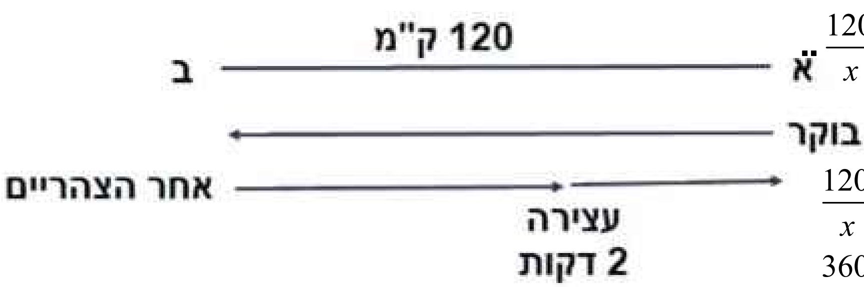
א. נסמן את מהירות הנסיעה של המכונית בבוקר ב- x **(קמ"ש) .**

		זמן (שעות)	מהירות (ק"מ לשעה)	דרך-מרחק (ק"מ)
נסיעה בבוקר	מכונית	$\frac{120}{x}$	x	120
נסיעה בערב	התחלה	1	x	x
	עצירה	$\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$	-	-
	המשך	$\frac{120-x}{x+10}$	$x+10$	$120-x$

זמן הנסיעה של המכונית בערב היה שווה לזמן הנסיעה שלה בבוקר.

המשוואה המתאימה: $\frac{120}{x}=1+\frac{1}{30}+\frac{120-x}{x+10}$



נפתור את המשוואה.

$$\frac{120}{x}=\frac{31}{30}+\frac{120-x}{x+10} \quad / \cdot 30x(x+10)$$

$$3600(x+10)=31x(x+10)+30x(120-x)$$

$$3600x+36000=31x^2+310x+3600x-30x^2$$

$$0=x^2+310x-36000$$

$$\boxed{x=90}$$

$$\cancel{x=-400} \quad \leftarrow x>0$$

תשובה: מהירות המכונית בבוקר הייתה 90 **קמ"ש.**

ב. המכונית עברה, משעה שמונה בערב ועד השעה 9 בערב 90 **ק"מ.**

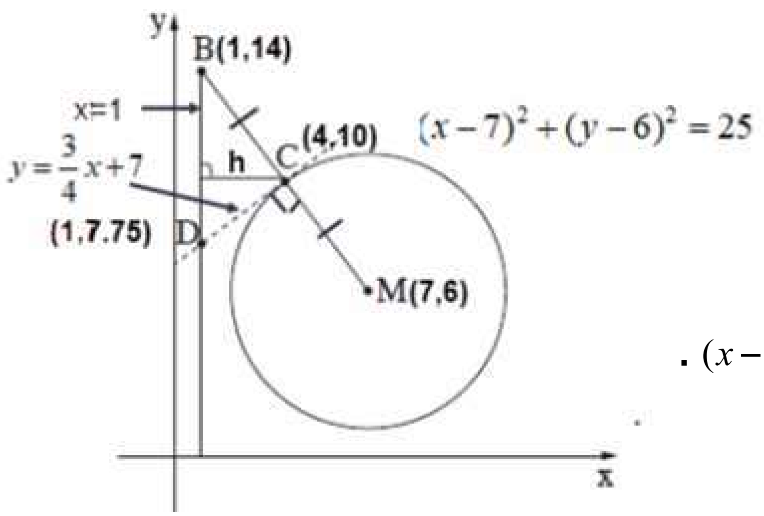
לאחר מכן, עצרה בצד הדרך עד תשע ושתי דקות.

במשך 6 **הדקות הבאות עברה** 10 **ק"מ** $=\frac{6}{60}\cdot 100$ **.**

מכאן שבשעה תשע ושמונה דקות בערב עברה 100 **ק"מ, ונותרו לה** 20 **ק"מ** $=120-100$ **עד עיר א'.**

תשובה: המרחק שלה מעיר א' בשעה תשע ו- 8 **דקות היה** 20 **ק"מ.**

א. נמצא את שיעורי הנקודה C **, נקודת האמצע של הקטע** MB **.**



$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{7+1}{2} = 4 \\ y_C &= \frac{6+14}{2} = 10 \end{aligned}\right\} \boxed{C(4,10)}$$

נמצא את רדיוס המעגל.

$R = d_{CM} = \sqrt{(4-7)^2+(10-6)^2} = 5$ **.**

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-7)^2+(y-6)^2 = 25$ **.**

ב. נמצא את שיפוע הרדיוס MC **.**

$m_{MC} = \frac{y_C-y_M}{x_C-x_M} = \frac{10-6}{4-7} = -\frac{4}{3}$ **.**

הרדיוס BM **מאונך למשיק, בנקודת ההשקה, ובהתאם לתנאי ניצבות** $m_1 \cdot m_2 = -1$ **, נקבל** $m_{mashik} = +\frac{3}{4}$ **.**

נמצא את משוואת המשיק, העובר בנקודה C **.**

$$y-10 = \frac{3}{4}(x-4)$$

$$y-10 = \frac{3}{4}x-3$$

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x+7}$$

תשובה: משוואת המשיק, העובר בנקודה C **היא** $y = \frac{3}{4}x+7$ **.**

ג. משוואת BD **, האנך לציר ה-** x **, היא** $x=1$ **.**

$y_D = \frac{3}{4}\cdot 1+7 = 7.75$ **, ובהתאם** $D(1, 7.75)$ **.**

$$S_{\Delta BCD} = \frac{BD \cdot h_{BD}}{2} = \frac{(14-7.75)\cdot(4-1)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BCD} = 9.375}$$

תשובה: $S_{\Delta BCD} = 9.375$ **.**

ד. $ME \parallel CD$ **, לכן** CD **קטע אמצעים ב-** ΔBME **(יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול) .**

נמצא את שיעורי הנקודה E **, על פי נוסחת אמצע קטע.**

$$\left.\begin{array}{l} x_E = x_D = 1 \\ 7.75 = \dfrac{y_E + 14}{2} \quad \to 15.5 = y_E + 14 \quad \to 1.5 = y_E \end{array}\right\} \boxed{E(1,1.5)}$$

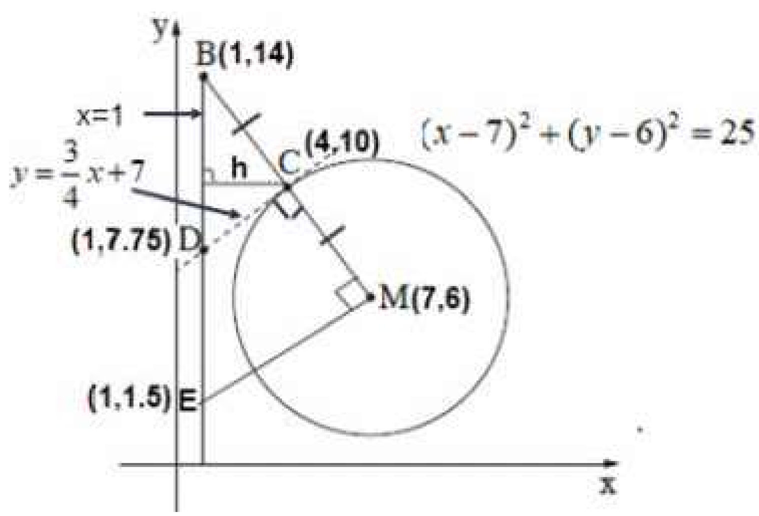
תשובה: $E(1,1.5)$ **.**

ה. $ME \parallel CD$ **, לכן** $\sphericalangle BME = \sphericalangle BCD = 90°$ **(זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים).**

מכאן ש- BD **הוא היתר ב-** ΔBME **.**

במשולש ישר זווית, מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר, ולכן זוהי הנקודה $D(1, 7.75)$.

תשובה: הוכחנו, הנקודה D **היא מרכז המעגל החוסם את** ΔBME **.**



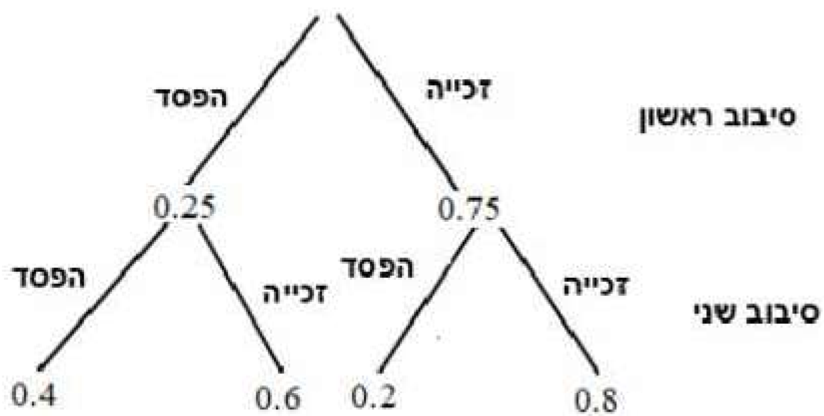
א. נסמן p - ההסתברות להפסיד במשחק הראשון, לכן $3p$ היא ההסתברות לזכות במשחק הראשון.

$$p+3p=1$$
$$4p=1$$
$$\boxed{p=0.25}\rightarrow\boxed{3p=0.75}$$

תשובה: ההסתברות לזכות בסיבוב הראשון היא 0.75.

ב. נעלה את הנתונים על עץ אפשרויות.

(הערה – ניתן לראות שהמאורעות "זכייה בסיבוב הראשון" ו"זכייה בסיבוב השני" תלויים זה בזה.)



(1) ההסתברות לזכות בדיוק בסיבוב אחד מבין שני הסיבובים – היא: $P=0.75\cdot0.2+0.25\cdot0.6=0.3$.

תשובה: ההסתברות היא 0.3.

(2) נחשב את ההסתברות שזכה בסיבוב הראשון, אם ידוע שזכה בדיוק בסיבוב אחד.

$$\mathrm{P}(won\,1st\ round\ /\ won\ exectly\ one\ round)=\frac{\mathrm{P}(won\,1st\ round\cap won\ exectly\ one\ round)}{\mathrm{P}(won\ exectly\ one\ round)}=\frac{0.75\cdot0.2}{0.3}=0.5$$

תשובה: ההסתברות היא 0.5 .

ג. (1) נחשב את ההסתברות לנצח במשחק כולו, כלומר את ההסתברות לזכות בשני הסיבובים.

$P=0.75\cdot0.8=0.6$**.**

תשובה: ההסתברות לנצח במשחק כולו היא 0.6 .

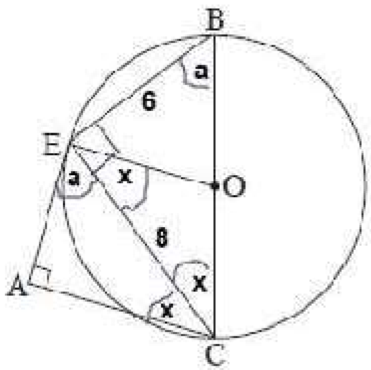
(2) נחשב את ההסתברות שכל ארבעת המשתתפים במשחק ינצחו במשחק כולו: $0.6^4=0.1296$.

או, בסיוע נוסחת ברנולי, כי זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=4$, $p=0.6$, $k=4$.

$$\mathrm{P}(all\ \ four\ will\ win)=\mathrm{P}_4(4)=\binom{4}{4}\cdot0.6^4\cdot(1-0.6)^{4-4}=1\cdot0.6^4\cdot0.4^0=0.6^4=0.1296$$

תשובה: ההסתברות, שכל ארבעת המשתתפים ינצחו במשחק כולו, היא 0.1296 .

נתונים



1. O **מרכז המעגל** **2.** BC **קוטר** **3.** AE **משיק ב-** E. **4.** $\sphericalangle EAC = 90°$.

עבור ד. 5. $BC \cdot AC = 64$ **עבור ד(2) 6.** 6 **ס"מ** $= EB$.

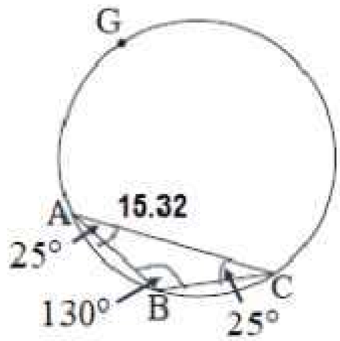
צ"ל: א. $EO \parallel AC$ **ב.** $\sphericalangle OCE = \sphericalangle ACE$ **ג.** $\Delta EBC \sim \Delta AEC$.

ד. (1) EC. **(2)** EO

הסבר		טענה	נימוק
1	7	O **מרכז המעגל**	**נתון**
3	8	AE **משיק ב-** E	**נתון**
8	9	$\sphericalangle OEA = 90°$	**הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה**
3	10	$\sphericalangle EAC = 90°$	**נתון**
10, 9	11	$EO \parallel AC$	**זוויות חד צדדיות משלימות ל-** $180°$
		מ.ש.ל. א	
7	12	$OE = OC$	**רדיוסים שווים זה לזה**
12	13	$\sphericalangle OCE = \sphericalangle OEC$	**מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔCEO
11	14	$\sphericalangle ACE = \sphericalangle OEC$	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
14, 13	15	$\sphericalangle OCE = \sphericalangle ACE$	**כלל המעבר**
		מ.ש.ל. ב	
2	16	BC **קוטר**	**נתון**
16	17	$\sphericalangle EBC = 90°$	**זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא ישרה**
17, 10	18	$\sphericalangle EBC = \sphericalangle OEA$ **(ז)**	**כלל המעבר**
8	19	$\sphericalangle AEC = \sphericalangle CBE$ **(ז)**	**זווית בין משיק למיתר**
19, 18	20	$\Delta EBC \sim \Delta AEC$	**משפט דמיון זווית זווית**
		מ.ש.ל. ג	
20	21	$\frac{EB}{AE} = \frac{BC}{EC} = \frac{EC}{AC}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
5	22	$BC \cdot AC = 64$	**נתון**
12	23	$BC \cdot AC = (EC)^2$	**נתון**
23, 22	24	8 **ס"מ** $= EC$	
		מ.ש.ל. ד(1)	

הסבר		טענה	נימוק
6	**25**	$EB =$ 6 **ס"מ**	**נתון**
17, 24, 25	**26**	$BC =$ 10 **ס"מ**	**משפט פיתגורס** ΔEBC
7, 16, 26	**27**	$EO =$ 5 **ס"מ**	**הרדיוס שווה לחצי מהקוטר**
מ.ש.ל. ד (2)			

א. נתון: רדיוס המעגל הוא 10 **ס"מ,** $AB = BC$ **,** $\sphericalangle ABC = 130°$ **.**



$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AC}{\sin 130°} = 2R$$

$$AC = 2 \cdot 10 \sin 130°$$

$$\boxed{AC = 15.32cm}$$

תשובה: 15.32 **ס"מ** $= AC$.

ב. ΔABC **שווה שוקיים, לכן** $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \frac{180° - 130°}{2} = 25°$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{15.32^2 \sin 25° \sin 25°}{2 \sin 130°}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = 27.36cm^2}$$

<u>דרך חלופית</u>

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BC}{\sin 25°} = 2R$$

$$BC = 2 \cdot 10 \sin 25°$$

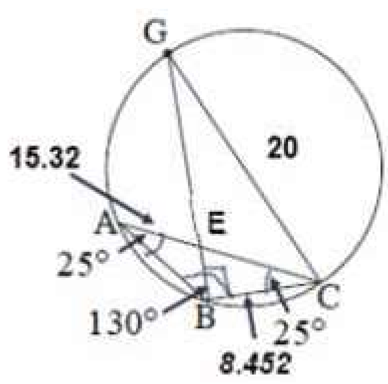
$$\boxed{BC = 8.452cm}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{15.32 \cdot 8.452 \sin 25°}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = 27.36cm^2}$$

תשובה: 27.36 **סמ"ר** $= S_{\Delta ABC}$.

ג. 20 **ס"מ** $= GC$ **קוטר המעגל.**



$\underline{\Delta EBC}$ **(**$\sphericalangle GBC = 90$ **, זווית היקפית הנשענת על הקוטר)**

$$\tan 25° = \frac{EB}{BC}$$

$$8.452 \cdot \tan 25° = EB$$

$$\boxed{EB = 3.941cm}$$

תשובה: 3.941 **ס"מ** $= EB$ **.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\frac{3x^2}{x^2+x-2}}$.

(1) בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס: $x^2+x-2\neq 0 \quad \to x\neq -2\,,\, x\neq 1$

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq -2\,,\, x\neq 1$.

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים.

אסימפטוטות מקבילה לציר ה- y **: הישרים** $x=1$ **ו-** $x=-2$ **(מספר זה מאפס מכנה ולא מונה).**

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x **:** $y=3$ **(חזקת מונה (2) שווה לחזקת מכנה (2) ,** $y\to\frac{3x^2}{x^2}=3$ **).**

תשובה: $x=1$ **,** $x=-2$ **,** $y=3$.

(3) נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $f(0)=\frac{3\cdot 0^2}{0^2+0-2}=0 \quad \to \boxed{(0,0)}$. **ציר** x **:** $y=0$ **-** $0=3x^2 \quad \to x=0 \quad \to \boxed{(0,0)}$

תשובה: $(0,0)$.

(4-5) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, ונקודות קיצון (אם יש כאלה).

$$f'(x)=\frac{6x(x^2+x-2)-3x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x\left[2(x^2+x-2)-x(2x+1)\right]}{(x^2+x-2)^2}$$

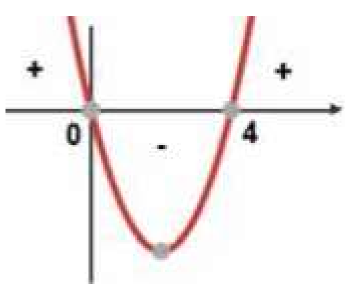
$$f'(x)=\frac{3x(2x^2+2x-4-2x^2-x)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}}$$

$$0=3x(x-4)$$

$$x=0 \quad \to \boxed{(0,0)}$$

$$x=4 \quad \to \boxed{(4,2\tfrac{2}{3})}$$



כאשר המונה הוא ביטוי של פרבולה ישרה, בעלת מינימום ("צוחקת")

נמצא את סוג נקודות הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי), בעזרת ציור גרף סימני $f'(x)$ **,**

כאשר מכנה הנגזרת חיובי והמונה הוא ביטוי אלגברי של פרבולה הפוכה (עצובה).

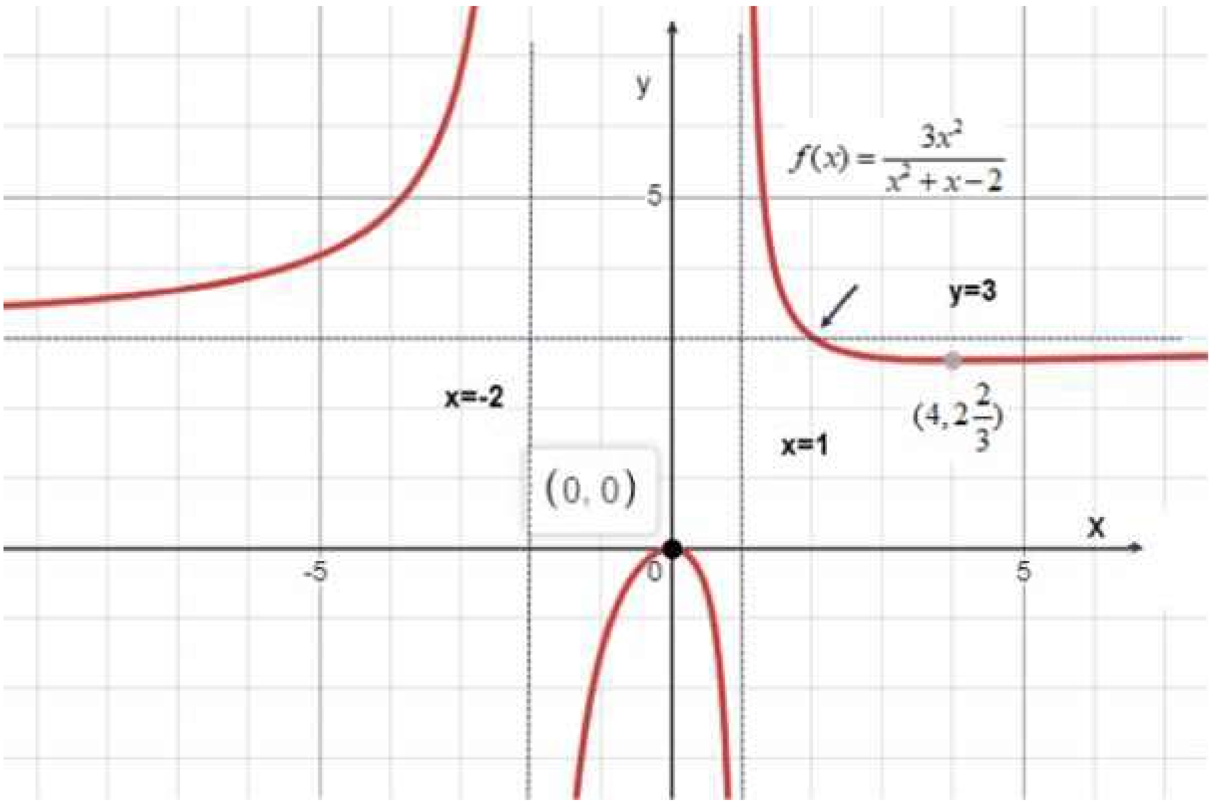
x		4		1		0		-2	
$f'(x)$	+		-		-		+		+
מקסנה	↗	**Min**	↘		↘	**Max**	↗		↗

תשובה (4): $(4,2\frac{2}{3})$ **מינימום ,** $(0,0)$ **מקסימום.**

תשובה (5) עלייה: $x>4$ **או** $-2<x<0$ **או** $x<-2$ **.**

ירידה: $1<x<4$ **או** $0<x<1$ **.**

ב. סקיצה של גרף הפונקציה



ג. על פי הסקיצה, קיימת נקודת חיתוך עם האסימפטוטה האופקית $y=3$ **(מסומנת בחץ).**

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך.

$$\frac{3x^2}{x^2+x-2}=3$$

$$3x^2=3(x^2+x-2) \quad /:3$$

$$x^2=x^2+x-2$$

$$2=x \quad \rightarrow \boxed{(2,3)}$$

תשובה: כן, שיעורי נקודת החיתוך הם $(2,3)$ **.**

ד. $g(x)=f(x)+\text{c}$

זו הזזה אנכית של $f(x)$ **ב-** c **יחידות.**

נתון כי האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ **היא** $y=5$ **,**

כלומר תזוזה של 2 **יחידות כלפי מטה, מהאסימפטוטה האופקית של** $f(x)$ **שהיא** $y=3$ **.**

תשובה: $c=2$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+9x+a$ **, המוגדרת לכל** x **,** a **הוא פרמטר.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, ובהתאם:** $f(x)=a$ **.**

תשובה: $(0,a)$**.**

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$\boxed{f'(x)=-x^2+9}$

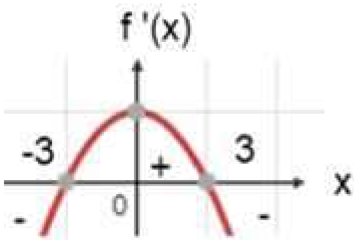
$0=-x^2+9$

$x=3 \quad \rightarrow \boxed{(3,a+18)}$

$x=-3 \quad \rightarrow \boxed{(-3,a-18)}$

נמצא את סוג נקודות הקיצון, בעזרת סקיצה של $f'(x)$ **,**

שהיא פרבולה הפוכה (עצובה).



x		3		-3	
$f'(x)$	-		+		-
מסקנה	↘	**Max**	↗	**Min**	↘

תשובה: $(3,a+18)$ **מקסימום ,** $(-3,a-18)$ **מינימום.**

ג. נתון שנקודת המינימום נמצאת על ציר ה- x **, לכן** $y=0$ **.**

$a-18=0 \quad \rightarrow \boxed{a=18}$**.**

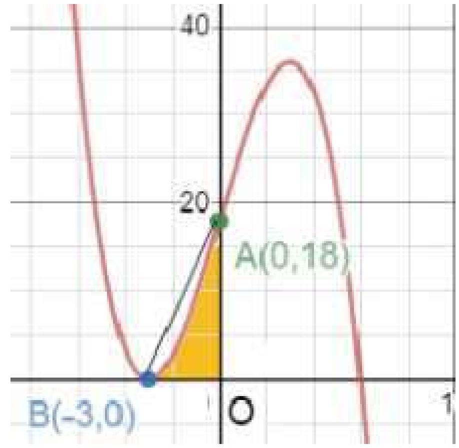
תשובה: $a=18$ **.**

ד. נציב $a=18$ **והפונקציה היא** $\boxed{f(x)=-\frac{1}{3}x^3+9x+18}$**.**

תשובה: $(3,36)$ **מקסימום ,** $(-3,0)$ **מינימום.**

ה. סקיצה של גרף הפונקציה, כולל סימון שטחים, עבור סעיף ו.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+9x+18$



ו. (1) נחשב את השטח המבוקש, המסומן בסעיף הקודם.

$$S=\int_{-3}^{0}(-\frac{1}{3}x^3+9x+18-0)\,dx$$

$$S=-\frac{x^4}{12}+\frac{9x^2}{2}+18x\Big]_{-3}^{0}$$

$$x=0:\quad 0$$

$$x=-3:\quad -20\frac{1}{4}$$

$$\boxed{S=20\frac{1}{4}}$$

תשובה: גודל השטח הוא $20\frac{1}{4}$ **יח"ר.**

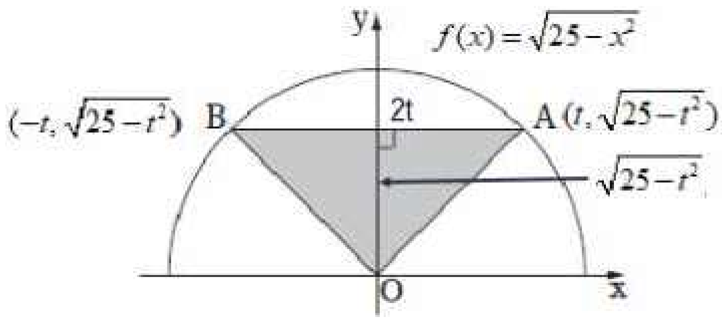
(2) נראה שגרף הפונקציה מחלק את ΔABO **לשני שטחים שהיחס ביניהם הוא** $1:3$.

$$S_{\Delta ABO}=\frac{OB\cdot OA}{2}=\frac{3\cdot 18}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABO}=27}$$

השטח שחשבנו בתת-סעיף ו(1) הוא $20\frac{1}{4}:27=3:4$ **משטח** ΔABO**, ומכאן שגרף הפונקציה מחלק את** ΔABO **לשני שטחים שהיחס ביניהם** $1:3$ **(היחס בין השטח הלבן לבין השטח הצבוע הוא** $1:3$**).**

תשובה: הוכחנו שגרף הפונקציה מחלק את ΔABO **לשני שטחים שהיחס ביניהם הוא** $1:3$.



א. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

(1) $\boxed{A(t,\sqrt{25-t^2})} \rightarrow \quad x_A=t$ **.**

נראה שהפונקציה זוגית, כלומר סימטרית לציר ה- y **.**

$f(-x)=\sqrt{25-(-x)^2}=\sqrt{25-x^2}=f(x)$ **.**

לכן, עקב הזוגיות והעובדה ש- $y_B=y_A$ **, הרי ש-** $\boxed{B(-t,\sqrt{25-t^2})}$ **.**

תשובה: $B(-t,\sqrt{25-t^2})$ **.** $(-t,\sqrt{25-t^2})$

(2) $\boxed{A(t,\sqrt{25-t^2})} \rightarrow \quad x_A=t$ **.**

אורך הצלע AB **, המקבילה לציר ה-** x **, היא** $x_A-x_B=t-(-t)=2t$

אורך הגובה לצלע זו, הוא שיעור ה- y **של הישר** AB **, כלומר** $\sqrt{25-t^2}$ **.**

$$S_{\Delta ABO}=\frac{AB\cdot h_{AB}}{2}=\frac{2t\cdot\sqrt{25-t^2}}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABO}=t\cdot\sqrt{25-t^2}}$$

תשובה: $S_{\Delta ABO}=t\cdot\sqrt{25-t^2}$ **.**

ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא שטח משולש ABO **.**

$$\boxed{S = t\cdot\sqrt{25-t^2}}$$

$$S' = \sqrt{25-t^2} + t\cdot\frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{25-t^2}}$$

$$S' = \frac{25-t^2-t^2}{\sqrt{25-t^2}}$$

$$\boxed{S' = \frac{25-2t^2}{\sqrt{25-t^2}}}$$

$$25-2t^2 = 0$$

$$t^2 = 12.5 \quad \rightarrow t = \sqrt{12.5} \approx 3.536 \quad o.k. \quad \leftarrow 0 < t < 5$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(3) = \frac{+}{+} > 0 \\ S'(4) = \frac{-}{+} < 0 \end{array}\right\} \boxed{t = \sqrt{12.5}\text{ , max}}$$

תשובה: $t = \sqrt{12.5}$ **, עבורו שטח משולש** ABO **הוא מקסימלי.**