

נתונות שתי סדרות. סדרה אחת חשבונית וסדרה אחת הנדסית.

בכל סדרה האיבר הראשון הוא 9.

האיבר השני בסדרה החשבונית גדול ב- 2 מהאיבר השני בסדרה ההנדסית.

האיבר השלישי זהה בשתי הסדרות.

איברי הסדרה החשבונית: $9, 9+d, 9+2d$, כאשר d הוא הפרש הסדרה.

בהתאם איברי הסדרה ההנדסית הם: $9, 7+d, 9+2d$

בסדרה הנדסית המנה קבועה, לכן:

$$\frac{9+2d}{7+d} = \frac{7+d}{9}$$

$$9(9+2d) = (7+d)^2$$

$$81+18d = 49+14d+d^2$$

$$d^2 - 4d - 32 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{4 \pm 12}{2}$$

$$d_1 = 8, d_2 = -4$$

עבור $d = 8$ איברי הסדרה החשבונית הם: $9, 17, 25, \dots$ ואיברי הסדרה ההנדסית $9, 15, 25, \dots (q = 1\frac{2}{3})$

עבור $d = -4$ איברי הסדרה החשבונית הם: $9, 5, 1, \dots$ ואיברי הסדרה ההנדסית $9, 3, 1, \dots (q = \frac{1}{3})$

תשובה: אפשרות ראשונה: $a_2 = 17$ בחשבונית, $a_2 = 15$ בהנדסית,

אפשרות שנייה: $a_2 = 5$ בחשבונית, $a_2 = 3$ בהנדסית

א. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$, $g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}$.

(1) נמצא תחומי עלייה וירידה של $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^x e^{-x}}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} - 1 - 1}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} - 2}{(1+e^x)^2}$$

הפונקציה מוגדרת לכל x כי מכנה הפונקציה הוא סכום של שני ביטויים חיוביים.
מונה הנגזרת הוא שלילי לכל x ומכנה הנגזרת חיובי לכל x לכן הנגזרת שלילית לכל x
מסקנה: הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל x .

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה של $g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}$

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}(1+e^x) - e^x e^{-2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x} - 2e^{-x} - e^{-x}}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x} - 3e^{-x}}{(1+e^x)^2}$$

הפונקציה מוגדרת לכל x כי מכנה הפונקציה הוא סכום של שני ביטויים חיוביים.
מונה הנגזרת הוא שלילי לכל x ומכנה הנגזרת חיובי לכל x לכן הנגזרת שלילית לכל x
מסקנה: הפונקציה $g(x)$ יורדת לכל x .

ב. (1) בנקודת חיתוך עם חיתוך עם ציר y מתקיים $x=0$ ונקבל $(0, 0.5) \rightarrow f(0) = \frac{e^{-0}}{1+e^0} = 0.5$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$ היא מנה של שני ביטויים חיוביים לכל x ולכן גרף הפונקציה כולו מעל ציר ה- x .

תשובה: $(0, 0.5)$, אין חיתוך עם ציר ה- x .

(2) בנקודת חיתוך עם חיתוך עם ציר y מתקיים $x=0$ ונקבל $(0, 0.5) \rightarrow g(0) = \frac{e^{-2 \cdot 0}}{1+e^0} = 0.5$

$g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}$ היא מנה של שני ביטויים חיוביים לכל x ולכן גרף הפונקציה כולו מעל ציר ה- x .

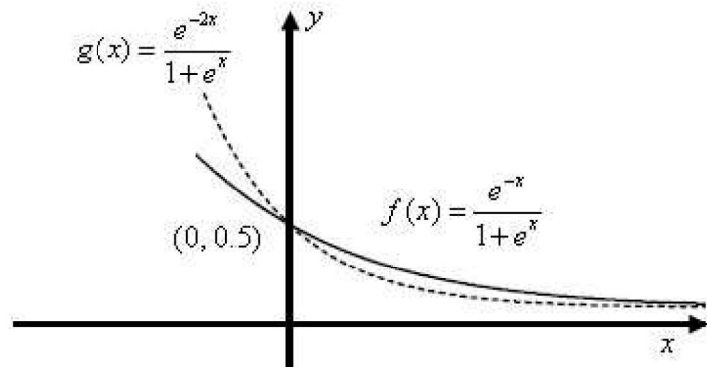
תשובה: $(0, 0.5)$, אין חיתוך עם ציר ה- x .

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נשים לב (לא נדרש בשאלה)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x} \quad \text{ובהתאם הקרן החיובית של ציר ה-} x \text{ היא אסימפטוטה אופקית של} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{0}{\infty} = 0$$

סרטוט סקיצה, כולל עבור סעיף ה.



$$e^{-x} > e^{-2x} \quad \text{ד. (1)}$$

כיוון שבשני האגפים בסיס גדול מ-1, נקבל $-x > -2x \rightarrow x > 0$

תשובה: $x > 0$

$$g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x} \quad \text{(2)}$$

$f(x) > g(x)$ עבור $x > 0$, שכן המכנים של שתי הפונקציות חיוביים לכל x ,

והמונה של $f(x)$ גדול מהמונה של $g(x)$ עבור $x > 0$ על פי סעיף ד (1).

תשובה: $x > 0$

ה. ראה הסרטוט בסעיף ג.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + \frac{1}{4} \ln^4 x$.

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- \ln לא יכולה לקבל מספרים אי חיוביים, לכן $x > 0$.
תשובה: $x > 0$

ב. נמצא את נקודת הקיצון ואת סוגה:

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + \frac{1}{4} \ln^4 x$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3} \frac{\ln^2 x}{x} + 4 \cdot \frac{1}{4} \frac{\ln^3 x}{x} \rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\ln^2 x + \ln^3 x}{x}}$$

$$0 = \ln^2 x + \ln^3 x \rightarrow 0 = \ln^2 x(1 + \ln x)$$

$$\ln^2 x = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{3} \ln^3 1 + \frac{1}{4} \ln^4 1 = 0 \rightarrow (1, 0)$$

$$\ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \rightarrow y = \frac{1}{3} \ln^3 \left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{4} \ln^4 \left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{12} \rightarrow \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{12}\right)$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה והנגזרת שלה.

$$f'(1.2) = \ln^2 0.2 + \ln^3 0.2 = -1.58 < 0, \quad f'(0.2) = \ln^2 1.2 + \ln^3 1.2 = 0.04 > 0$$

x	0	0.2	$\frac{1}{e} = 0.37$.	1	1.2
$f(x)$		0	$-\frac{1}{12}$		0	
$f'(x)$		-	0		0	+
מסקנה		↘	Min	↗	פיתול	↗

תשובה: $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{12}\right)$ מינימום.

ג. הסקיצה של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, משמאל

כמו בטבלת העלייה והירידה:

$$f'(x) > 0 \text{ בתחומים } x > 1 \text{ או } \frac{1}{e} < x < 1 \text{ ולכן } B(1, 0)$$

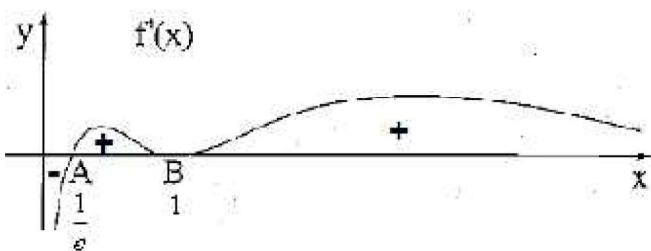
$$f'(x) < 0 \text{ בתחום } 0 < x < \frac{1}{e} \text{ ולכן } A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

תשובה: $A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$, $B(1, 0)$ הערה (מעבר לתוכנית הלימודים של 4 יחידות)

שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$ הם שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $f(x)$.

כאשר המשיק בנקודת הפיתול, שבה $x=1$ מקביל לציר ה- x .

נכתב ע"י עפר ילין



א. בסיס התיבה הוא ריבוע, שזוויותיו ישרות.

משולש DCB' הוא ישר זווית ($\sphericalangle DCB' = 90^\circ$), שכן מקצוע הבסיס DC מאונך לפאה $CBB'C'$,

ולכן מאונך גם לכל ישר העובר דרך עקבו ומונח על הפאה.

נתון כי שטח המשולש DCB' שווה ל- $0.6a^2$, כאשר $DC = a$

ולכן על פי נוסחת שטח משולש:

$$\Delta DCB'$$

$$0.6a^2 = \frac{a \cdot CB'}{2}$$

$$1.20.6a^2 = a \cdot CB' \quad / : a > 0$$

$$\boxed{CB' = 1.2a}$$

תשובה: $CB' = 1.2a$

ב. נמצא את גודל הזווית שבין DB' למישור $ABCD$.

זווית זו היא $\sphericalangle B'DB$ - הזווית שבין המשופע להיטל שלו על הבסיס, שכן BB' הוא האנך מ- B' לבסיס.

נמצא, תחילה, את DB' ואת DB באמצעות משפט פיתגורס.

$$\Delta ADB$$

$$(DB')^2 = (CD)^2 + (BD)^2$$

$$(DB')^2 = a^2 + a^2$$

$$(DB')^2 = 2a^2$$

$$\boxed{DB' = a\sqrt{2}}$$

$$\Delta DCB'$$

$$(DB')^2 = (CB')^2 + (DC)^2$$

$$(DB')^2 = (1.2a)^2 + a^2$$

$$(DB')^2 = 2.44$$

$$\boxed{DB' = 1.562a}$$

$$\Delta B'DB$$

$$\cos \sphericalangle B'DB = \frac{BD}{CB'} = \frac{a\sqrt{2}}{1.562a}$$

$$\cos \sphericalangle B'DB = 0.905$$

$$\boxed{\sphericalangle B'DB = 25.12^\circ}$$

תשובה: הזווית שבין DB' למישור $ABCD$ היא בת 25.12° .

ג. נמצא את גודל הזווית בין המישור DCB' למישור $ABCD$ - זווית $\sphericalangle B'CB$.

ישר החיתוך בין המישורים הוא מקצוע הבסיס DC , כאשר האנכים מהמישורים הם: $B'C$ ו- CB' .

$$\Delta B'CB$$

$$\cos \sphericalangle B'CB = \frac{BC}{CB'} = \frac{a}{1.2a}$$

$$\cos \sphericalangle B'CB = 0.833$$

$$\boxed{\sphericalangle B'CB = 33.56^\circ}$$

תשובה: הזווית בין המישור DCB' למישור $ABCD$ היא בת 33.56° .

נכתב ע"י עפר ילין

