סדרת המרחקים שעובר כל רוכב מהווה סדרה חשבונית.

נארגן את הנתונים בטבלה מתאימה.

	רוכב ראשון	רוכב שני
a_1	50	90
d	5	–4
n	n	$n-3$

המרחק הכולל שעברו עד לפגישה ביניהם היה $1{,}110$ **ק"מ,**

ניעזר בנוסחת סכום של סדרה חשבונית.

$$S_n = \frac{n(2\cdot a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$\frac{n(2\cdot 50 + 5(n-1))}{2} + \frac{(n-3)(2\cdot 90 - 4(n-3-1))}{2} = 1{,}110 \quad / \cdot 2$$

$$n(100+5n-5) + (n-3)(180-4n+16) = 2{,}220$$

$$n(95+5n) + (n-3)(196-4n) = 2{,}220$$

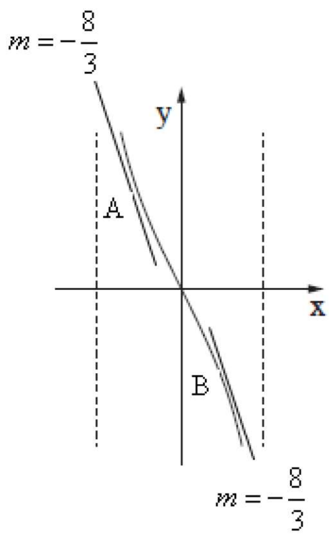
$$95n + 5n^2 + 196n - 4n^2 - 588 + 12n - 2{,}220 = 0$$

$$n^2 + 303n - 2808 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-303 \pm 321}{2}$$

$$\boxed{n=9} \quad \leftarrow n > 0$$

תשובה: הרוכבים ייפגשו כעבור 9 **שעות מרגע יציאת הרוכב הראשון לדרך.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\log_{\frac{1}{e}}(1+x)-\log_{\frac{1}{e}}(1-x)$

הביטוי שהפונקציה הלוגריתמית מקבלת הוא חיובי, לכן:

$$\left.\begin{array}{l} 1+x>0 \quad \rightarrow x>-1 \\ 1-x>0 \quad \rightarrow x<1 \end{array}\right\} \boxed{-1<x<1}$$

תשובה: $-1<x<1$

ב. נשתמש בנוסחה לשינוי בסיס הנמצאת בנוסחאון: $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c a}$

$$f(x)=\log_{\frac{1}{e}}(1+x)-\log_{\frac{1}{e}}(1-x)$$

$$f(x)=\frac{\log_e(1+x)}{\log_e\frac{1}{e}}-\frac{\log_e(1-x)}{\log_e\frac{1}{e}}$$

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{-1}-\frac{\ln(1-x)}{-1}$$

$$\boxed{f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)}$$

תשובה: הוּכח.

ג. (1) נמצא את נגזרת הפונקציה ונשווה אותה לשיפוע המשיקים $m=-\frac{8}{3}$.

$$\boxed{f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)}$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$$

$$-\frac{8}{3}=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x} \quad /3(1-x^2)$$

$$-8(1-x^2)=-3(1+x)-3(1-x)$$

$$-8+8x^2=-3-3x-3+3x$$

$$8x^2=2$$

$$x^2=0.25$$

$$x=\pm 0.5$$

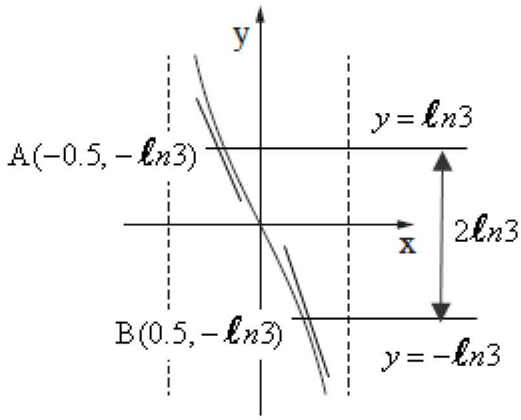
$$\boxed{x_A=-0.5,\ x_B=0.5}$$

על פי הנתון, הנקודה A **ברביע השני ולכן** $x_A<0$

תשובה: $x_A=-0.5,\ x_B=0.5$

(2) ישרים המקבילים לציר ה- x, הם פונקציות קבועות.

נמצא את שיעורי ה- y של הנקודות.



$$f(0.5)=\ell n\,(1-0.5)-\ell n\,(1+0.5)$$
$$f(0.5)=\ell n\,(0.5)-\ell n\,(1.5)$$
$$f(0.5)=\ell n\frac{0.5}{1.5}=\ell n\frac{1}{3}=-\ell n3$$
$$B(0.5,-\ell n3)$$
$$f(-0.5)=\ell n\,(1-(-0.5))-\ell n\,(1+(-0.5))$$
$$f(-0.5)=\ell n\,(1.5)-\ell n\,(0.5)$$
$$f(-0.5)=\ell n\frac{1.5}{0.5}=\ell n3$$
$$A(-0.5,\ell n3)$$

משוואת הישר העובר בנקודה $B(0.5,-\ell n3)$ הוא $y=-\ell n3$

משוואת הישר העובר בנקודה $A(-0.5,\ell n3)$ הוא $y=\ell n3$

והמרחק בין שני הישרים המקבילים לציר ה- x הוא: $\ell n3-(-\ell n3)=2\ell n3$

תשובה: הוכח.

ד. כיוון שעל פי הסקיצה $f(x)$ יורדת בתחום ההגדרה $-1<x<1$, הרי ש- $f'(x)<0$ בתחום זה.

תשובה: $f'(x)$ תמיד שלילית (בתחום ההגדרה $-1<x<1$)

א. נצייר את הגרף של $f(x)$ בהתאם למאפיינים שלה, שניתנו (כולל סימון השטח לסעיף ג).

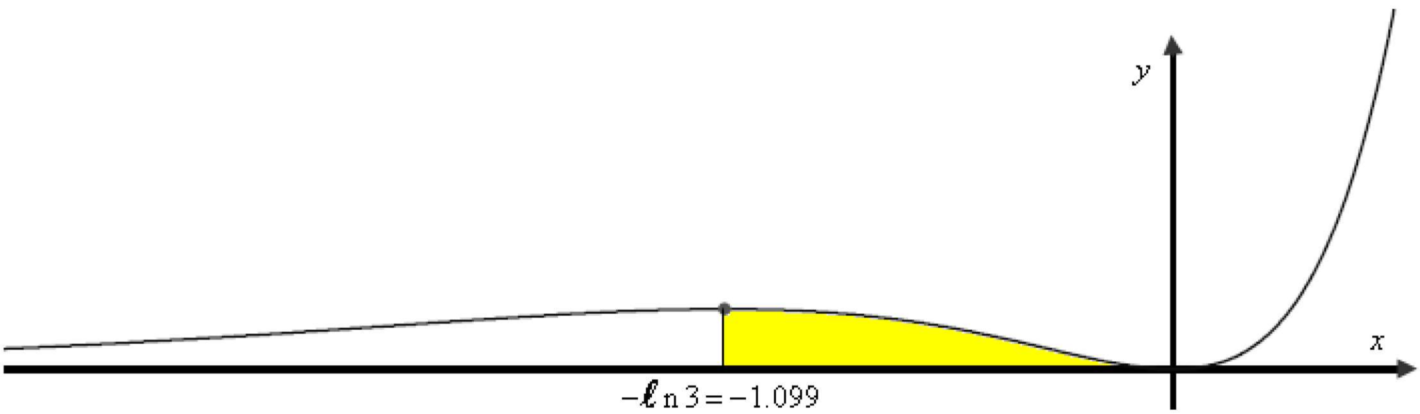
נבנה טבלת עלייה וירידה על פי הנתונים

x		0		$-\ell n3=-1.099$	
y'	+	0	-	0	+
מסקנה	↗	Min	↘	Max	↗

$(0,0)$ **נקודת מינימום על פי תחומי עליה וירידה..**

$x=-\ell n3=-1.099$ **נקודת מקסימום,**

$f(x)\geq 0$ **לכל** x **כלומר** $f(x)$ **אי-שלילית, לכן עבור** $x\to-\infty$ **תהייה לפונקציה אסימפטוטה אופקית.**



ב. נתון כי $f(x)=e^{3x}-2e^{ax}+e^{x}$ **, כאשר** $(0,0)$ **נקודת מינימום, לכן** $f'(0)=0$ **.**

$$f'(x)=3e^{3x}-2ae^{ax}+e^{x}$$
$$f'(x)=3e^{3\cdot 0}-2ae^{a\cdot 0}+e^{0}$$
$$0=3-2a+1 \quad \to 2a=4$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$ **.**

ג. נציב $a=2$ **בתבנית הפונקציה ונקבל:** $f(x)=e^{3x}-2e^{2x}+e^{x}$ **.**

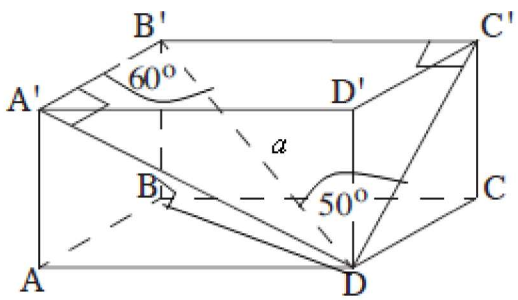
$$S=\int_{-\ell n3}^{0}(e^{3x}-2e^{2x}+e^{x})dx$$
$$S=\frac{e^{3x}}{3}-\frac{2e^{2x}}{2}+e^{x}\Big]_{-\ell n3}^{0}$$
$$S=(\frac{e^{3\cdot 0}}{3}-e^{2\cdot 0}+e^{0})-(\frac{e^{3\cdot(-\ell n3)}}{3}-e^{2\cdot(-\ell n3)}+e^{-\ell n3})=(\frac{1}{3}-1+1)-(\frac{e^{\ell n27^{-1}}}{3}-e^{(\ell n9^{-1})}+e^{\ell n3^{-1}})$$
$$S=(\frac{1}{3})-(\frac{1/27}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-\frac{19}{81}$$
$$S=\frac{8}{81}$$

תשובה: גודל השטח המבוקש $\frac{8}{81}$ **יח"ר.**

א. אורך אלכסון התיבה $B'D$ **הוא** a.

(1) משולש $A'B'D$ **הוא ישר זווית** ($\sphericalangle B'A'D = 90°$)**, שכן מקצוע הבסיס** $A'B'$ **מאונך לפאה** $A'ADD'$ **,**

ולכן לכל ישר העובר דרך עקבו שמונח על הפאה.



$\underline{\Delta B'A'D}$

$$\cos A'B'D = \frac{A'B}{B'D}$$

$$\cos 60° = \frac{A'B}{a}$$

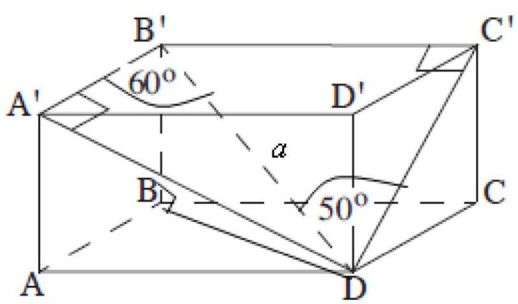
$$a\cos 60° = A'B$$

$$\boxed{A'B' = 0.5a}$$

תשובה: $A'B' = 0.5a$

(2) משולש $C'B'D$ **הוא ישר זווית** ($\sphericalangle B'C'D = 90°$)**, שכן מקצוע הבסיס** $B'C'$ **מאונך לפאה** $DCC'D'$ **,**

ולכן לכל ישר העובר דרך עקבו שמונח על הפאה.



$\underline{\Delta C'B'D}$

$$\sin \sphericalangle B'DC' = \frac{B'C'}{B'D}$$

$$\sin 50° = \frac{B'C'}{a}$$

$$a\sin 50° = B'C'$$

$$\boxed{B'C' = 0.766a}$$

תשובה: $B'C' = 0.766a$

(3) משולש $C'B'D'$ **הוא ישר זווית** ($\sphericalangle B'C'D' = 90°$)**, כי בסיסי התיבה מלבנים, כאשר** $D'C' = A'B' = 0.5a$.

נשתמש במשפט פיתגורס למצוא את אלכסון הבסיס העליון ששווה לאלכסון הבסיס התחתון.

$\underline{\Delta C'B'D'}$

$$(B'D')^2 = (B'C')^2 + (D'C')^2 \quad \rightarrow (D'B')^2 = (0.766a)^2 + (0.5a)^2$$

$$(D'B')^2 = 0.8368a^2 \quad \rightarrow D'B' = 0.9148a \quad \leftarrow a > 0$$

$$\boxed{DB = 0.9148a} \qquad \leftarrow DB = D'B'$$

תשובה: $DB = 0.9148a$

ב. משולש $B'BD$ **הוא ישר זווית** ($\sphericalangle B'BD = 90°$) **כי גובה התיבה** $(B'B)$ **מאונך לבסיס.**

$$\underline{\Delta B'BD}$$

$$(B'D)^2 = (B'B)^2 + (BD)^2 \quad \rightarrow (B'B)^2 = a^2 - (0.9148a)^2$$

$$(B'B)^2 = 0.1631a^2 \quad \rightarrow \boxed{B'B = 0.4039a} \quad \leftarrow a > 0$$

נפח התיבה שווה למכפלת שלושת הממדים: $V = A'B' \cdot B'C' \cdot B'B = 0.5a \cdot 0.766a \cdot 0.4039a = 0.1547a^3$

תשובה: נפח התיבה הוא $0.1547a^3$.