**א. הסדרה** $a_n$ **מוגדרת לכל** $n$ **טבעי לפי הכלל** $a_{n+1}=3a_n+5$ **.**

**הסדרה** $b_n$ **מוגדרת לכל** $n$ **טבעי על ידי** $b_n=a_n+2.5$ .

**נוכיח כי** $b_n$ **סדרה הנדסית, כאשר נראה כי המנה של** $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ **היא קבועה .**

**על פי הגדרת הסדרה** $b_n$

$$b_{n+1}=a_{n+1}+2.5$$
$$b_{n+1}=3a_n+5+2.5$$
$$b_{n+1}=3a_n+7.5$$

**ועתה נראה כי המנה קבועה:**

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3a_n+7.5}{a_n+2.5}=\frac{3(a_n+2.5)}{a_n+2.5}=3$$

**לכן המנה בין שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב-** $n$ **) והסדרה הנדסית.**

$a_n\neq -2.5$ **לכן אין בסדרה** $b_n$ **איבר שערכו** $0$ **(אחרת לא יכלה להיות סדרה הנדסית).**

**תשובה: הוכח, והמנה היא** $3$**.**

**ב. נתון כי** $b_1=2$ **ומנת הסדרה** $3$ **על פי סעיף א.**

$$b_n=a_n+2.5$$
$$a_n=b_n-2.5$$
$$a_n=b_1\,{q_b}^{n-1}-2.5$$
$$\boxed{a_n=2\cdot 3^{n-1}-2.5}$$

**תשובה:** $a_n=2\cdot 3^{n-1}-2.5$ **.**

**ג. (1) נמצא את סכום איברי הסדרה** $b_n$ **באמצעות נוסחת הסכום של סדרה הנדסית**

$$S_n^b=\frac{2(3^n-1)}{3-1}$$
$$\boxed{S_n^b=3^n-1}$$

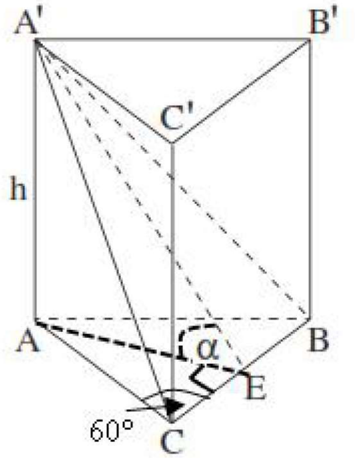
**תשובה:** $3^n-1$

**(2)** $b_n=a_n+2.5$ **ובהתאם** $a_n=b_n-2.5$ **.**

**סכום איברי הסדרה** $a_n$ **הוא, אם כך, כסכום איברי הסדרה** $b_n$ **בהפחתת** $2.5$ **לכל איבר בסדרה.**

**לכן, סכום איברי הסדרה** $a_n$ **הוא** $3^n-1-2.5n$ **.**

**תשובה:** $3^n-1-2.5n$**.**




**א. כיוון שבסיס המנסרה הוא משולש שווה צלעות,**

**הרי שפאות המנסרה חופפות זו לזו,**

**ולכן אלכסוני הפאות שווים ו-** $CA'B$ הוא **שווה שוקיים,**

**והגובה** $A'E$ **הוא גם תיכון לבסיס משולש זה .**

**ובהתאם** $AE$ **הוא גובה לצלע** $BC$ **במש"ץ** $\Delta ABC$ **.**

$\underline{A'AE}$

$$\tan\alpha = \frac{A'A}{AE}$$

$$\boxed{AE = \frac{h}{\tan\alpha}}$$

$\underline{AEC}$

$$\sin 60° = \frac{AE}{AC}$$

$$\boxed{AC = \frac{2h}{\sqrt{3}\tan\alpha}}$$

**תשובה: אורך צלע הבסיס הוא** $\frac{2h}{\sqrt{3}\tan\alpha}$ **.**

**ב. הזווית בין** $A'C$ **למישור הבסיס** $ABC$,

**היא** $\sphericalangle A'CA$ **שבין** $A'C$ **(המשופע) לבין ההיטל שלו לבסיס** $ABC$, **ומתקבלת במשולש ישר הזווית** $A'AC$ $(\sphericalangle A = 90°)$ **.**

**נתון כי** $\alpha = 30°$ **לכן** $AC = \frac{2h}{\tan 30°\sqrt{3}} = 2h$

$\underline{A'AC}$

$$\tan\sphericalangle A'CA = \frac{A'A}{AC}$$

$$\tan\sphericalangle A'CA = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'CA = 26.565°}$$

**תשובה: הזווית בין** $A'C$ **למישור הבסיס** $ABC$ **היא בת** $26.565°$ **.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2$ **בקטע** $-\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$ .

**(1) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה**

$$\cos x\ne 0 \quad \to x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$k=0 \quad \to x\ne\frac{\pi}{2}, \quad k=-1 \quad \to x\ne-\frac{\pi}{2}$$

$x=\frac{\pi}{2}$ **ו-** $x=-\frac{\pi}{2}$ **מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים המתאימים הם אסימפטוטות אנכיות.**

**תשובה: תחום ההגדרה** $x\ne\pm\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$ **,**

$x=\frac{\pi}{2}$ **,** $x=-\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטות המקבילות לציר ה-** $y$ .

**(2) נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה-** $x$ **בקטע הנתון.**

$$\frac{1}{\cos^2 x}-2=0 \quad \to 1-2\cos^2 x=0$$

$$-\cos 2x=0 \quad \to \cos 2x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad \to x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

$$k=0 \quad \to x=\frac{\pi}{4}, \quad k=1 \quad \to x=\frac{3\pi}{4}, \quad k=2 \quad \to x=\frac{5\pi}{4}$$

$$k=-1 \quad \to x=-\frac{\pi}{4}, \quad k=-2 \quad \to x=-\frac{3}{4}k=-3 \quad \to x=-\frac{5\pi}{4}$$

**תשובה:** $(\frac{5\pi}{4},0)$ $(\frac{3\pi}{4},0),$ $(\frac{\pi}{4},0),$ $(-\frac{\pi}{4},0),$ $(-\frac{3\pi}{4},0),$ $(-\frac{5\pi}{4},0),$

**ב. נחשב את גודל השטח המפוצל (המקווקו).**

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{\cos^2 x}-2)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(0-\frac{1}{\cos^2 x}+2))dx+=(\tan x-2x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+(-\tan x+2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S=(\tan\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4})+(-\tan\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4}+\tan 0+2\cdot 0)$$

$$S=\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-2$$

$$\boxed{S=0.779}$$

**תשובה: גודל השטח הוא** $0.779$ .

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\ell og_2(-x^2+4x+32)$ .

**נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה-** $\ell og$ **לא יכולה לקבל מספרים אי-חיוביים.**

$$-x^2+4x+32>0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 12}{-2}$$
$$x_1=-4,\quad x_2=8$$

**מתקבלת פרבולה בעלת מקסימום, כאשר היא חיובית עבור** $-4<x<8$ .

**תשובה:** $-4<x<8$ .

**ב. בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-** $x$ **מתקיים** $y=0$ :

$$\ell og_2(-x^2+4x+32)=0$$
$$-x^2+4x+32=1\quad\rightarrow -x^2+4x+31=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{140}}{-2}$$
$$x_1=-3.92\quad\rightarrow\boxed{(-3.92,0)}\qquad x_2=7.92\quad\rightarrow\boxed{(7.92,0)}$$

**בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-** $y$ **מתקיים** $x=0$

$f(0)=\ell og_2 32=5$ **ושיעורי הנקודה הם** $(0,5)$ .

**תשובה:** $(7.92,0)$ **,** $(-3.92,0)$ **,** $(0,5)$

**ג. נמצא את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.**

$$\boxed{f(x)=\ell og_2(-x^2+4x+32)}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x+4}{(-x^2+4x+32)\ell n\,2}}$$
$$-2x+4=0\quad\rightarrow x=2$$
$$f'(1)=\frac{-2\cdot 1+4}{+}>0,\quad f'(3)=\frac{-2\cdot 3+4}{+}<0\quad\rightarrow x=2, Max$$

**תשובה: ירידה:** $2<x<8$ **, עלייה** $-4<x<2$ .

**ד. נגזרת הפונקציה מתאפסת עבור** $x=2$ **וערך הפונקציה בנקודה זו הוא** $\ell og_2 36$ .

**בנקודה זו המשיק יקביל לציר ה-** $x$ **ומשוואתו** $y=\ell og_2 36$ .

**תשובה: משוואת המשיק היא** $y=\ell og_2 36$ .

**נוסחת הגידול והדעיכה:** $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** $M_0$ **- הכמות ההתחלתית**

$q$ **הוא גורם הגידול,** $M_t$ **הכמות לאחר זמן** $t$ **.**

**א. כעבור** $10$ **שנים (** $1/1/2000 - 1/1/2010$ **) גדלה האוכלוסייה ב-** $63\%$ **ממחירו לאחר סיום השיפוצים,**

**כלומר הכמות עלתה מ-** $M_0$ **ל-** $1.63M_0$ **ב-** $10$ **שנים.**

$$1.63M_0 = M_0 \cdot q^{10} \quad / : M_0$$
$$1.63 = q^{10}$$
$$q = \sqrt[10]{1.63}$$
$$\boxed{q = 1.05}$$

**נמצא כעבור כמה שנים , החל ב-** $1/1/2000$ **, גדל מספר התושבים מ-** $2.5$ **מיליון ל-** $8$ **מיליון.**

$$8 = 2.5 \cdot 1.05^t \quad / : 2.5$$
$$3.2 = 1.05^t$$
$$\ell n 3.2 = \ell n 1.05^t$$
$$\ell n 3.2 = t \ell n 1.05$$
$$\frac{\ell n 3.2}{\ell n 1.05} = t$$
$$\boxed{t = 23.84}$$

**תשובה כעבור** $23.84$ **שנים .**

**(1) נתונה הפונקציה** $f(x)=e^{x^2-m}-e^{m-x^2}$ .

**נמצא את שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.**

$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2-m}+2x\cdot e^{m-x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=2x\cdot(e^{x^2-m}+e^{m-x^2})}$$

$$0=2x\cdot(+)\quad \leftarrow e^{x^2-m}+e^{m-x^2} \leftarrow e^{r(X)}>0$$

$$x=0$$

$$f'(-1)=-2\cdot(+)<0,\quad f'(1)=2\cdot(+)>0\quad \rightarrow Min$$

$$x=0\quad \rightarrow f(0)=e^{-m}-e^{m}\quad \rightarrow (0,e^{-m}-e^{m})$$

**תשובה:** $(0,e^{-m}-e^{m})$ **מינימום.**

**(2) כיוון ששיפוע המשיק הוא אפס, הרי שהוא עובר בנקודת המינימום של הפונקציה.**

**שיעורי נקודת ההשקה הם** $(0,0)$ **כי משוואת המשיק היא** $y=0$ **, ושיעור ה-** $x$ **בקיצון הוא** $0$.

$$e^{-m}-e^{m}=0$$

$$e^{-m}=e^{m}$$

$$-m=m$$

$$\boxed{m=0}$$

**תשובה:** $m=0$ .