א. נתון כי $a_1 \cdot a_4 = (a_2)^2$ בסדרה חשבונית עולה.

$$a_1 \cdot (a+3d)_1 = (a_1+d)^2$$
$$a_1^2 + 3a_1 d = a_1^2 + 2a_1 d + d^2$$
$$a_1 d = d^2 \quad / : d > 0$$
$$\boxed{a_1 = d}$$

תשובה: הוכח.

ב. (1) בסדרה החשבונית נתון גם כי : a_4, a_6, a_9 מהווים שלושה איברים ראשונים בסדרה הנדסית,

שבה a_4 הוא האיבר הראשון.

לכן: $q = \dfrac{a_6}{a_4}$

$$q = \frac{a_1+5d}{a_1+3d}$$
$$q = \frac{d+5d}{d+3d} \quad \leftarrow a_1 = d$$
$$\boxed{q = 1.5}$$

תשובה: מנת הסדרה היא 1.5 .

(2) נסמן את האיבר הראשון מבין שלושת האיברים ב- x, כלומר $a_4 = x$.

לכן שלושת האיברים הם $x, 1.5x, 2.25x$ ($1.5^2 = 2.25$)

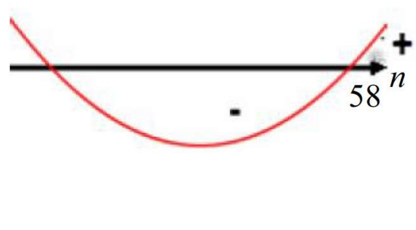
סכום שלושת האיברים הוא 133 ולכן: $x + 1.5x + 2.25x = 133 \quad \to x = 4.75x = 133 \quad \to x = 28$

אם כך: $a_4 = 28$, כלומר $a_1 + 3d = 28 \quad \to 4d = 28 \quad \to \boxed{d = 7}$

תשובה: הפרש הסדרה החשבונית הוא 7.

(3) בסדרה החשבונית $a_1 = d = 7$, $S_n > 11{,}977$.

$$\frac{n(2 \cdot 7 + 7 \cdot (n-1))}{2} > 11977$$
$$n(7+7n) > 23954$$
$$7n^2 + 7n - 23954 > 0$$
$$n_{1,2} = \frac{-7 \pm 819}{14} \quad n = 58$$



הפתרון השני שלילי ולכן נפסל. מתקבלת פרבולה בעלת מינימום, ולכן $n > 58$.

תשובה: ה- n הקטן ביותר המקיים את אי השוויון הוא 59.

א. (1) בסיס הפירמידה $ABCDE$ **הוא ריבוע, שאורך צלעו** a.

OE **קטע אמצעים ב-** ΔABC **ולכן** $OE=\frac{a}{2}$.

OE **הוא ההיטל לבסיס של** SE **ולכן** $\sphericalangle SEO=75^\circ$.

$$\underline{\Delta ESO}$$

$$\cos 75^\circ=\frac{OE}{SE}$$

$$SE=\frac{a}{2\cos 75^\circ}$$

$$\boxed{SE=1.932a}$$

תשובה: $SE=1.932a$.

(2) SE **הוא תיכון לבסיס** BC **בפאה הצדדית, שהיא משולש שווה שוקיים ולכן גם גובה ל-** BC.

נחשב שטח של פאה אחת ונכפול פי 4 **כי כל הפאות הצדדיות חופפות בפירמידה ריבועית.**

$$S_{\Delta SBC}=\frac{BC\cdot SE}{2}$$

$$S_{\Delta SBC}=\frac{a\cdot 1.932a}{2}$$

$$S_{\Delta SBC}=0.9659a^2$$

$$\boxed{M=3.8637a^2}$$

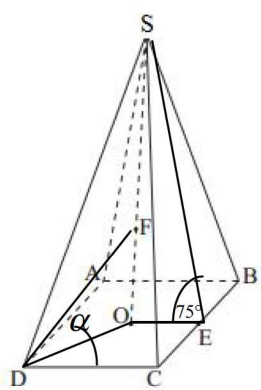
תשובה: שטח המעטפת הוא $3.8637a^2$.

ב. על פי משפט פיתגורס, ב- ΔSEO :

$$(SO)^2=(1.932a)^2-(0.5a)^2$$

$$SO=1.8662a \quad /:3$$

$$FO=0.6221a$$



כיוון שהאלכסונים בריבוע חוצים זה את זה, ושיים זה לזה

הרי ש- $DO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **, על ידי משפט פיתגורס ב-** ΔDBC .

DO **הוא ההיטל לבסיס של המקצוע הצדדי** DF **ולכן** $\sphericalangle FDO=?$.

$$\underline{\Delta FDO}$$

$$\tan\alpha=\frac{FO}{DO}$$

$$\tan\alpha=\frac{0.6221a}{a\sqrt{2}/2}$$

$$\boxed{\alpha=41.34^\circ}$$

תשובה: הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס בפירמידה $SABCD$ **היא בת** 41.34°.

3א

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t**.**

יובל הפקיד $10,000$ **שקל בריבית חודשית של** 2% **,** $q=\frac{100+2}{100}=1.02$ **.**

לכן, לאחר 12 **חודשים (שנה אחת) יהיו בחשבונו שבבנק** $12,682.42$ **שקל** $= 10,000\cdot 1.02^{12}$ **שקל.**

יובל משך $5,000$ **שקל ולכן לקראת המשך החיסכון עמדו לרשותו** $7,682.42$ **שקל.**

נמצא כמה זמן יעבור עד ששוב יהיו בחשבונו של יובל $10,000$ **שקל.**

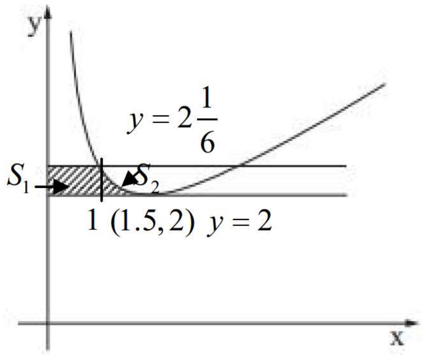
$$10,000 = 7,682.42\cdot 1.02^t \quad /:7,682.42$$
$$1.3017 = 1.02^t$$
$$\ell n 1.3017 = \ell n 1.02^t$$
$$\ell n 1.3017 = t \ell n 1.02$$
$$\frac{\ell n 1.3017}{\ell n 1.02} = t$$
$$\boxed{t = 13.31}$$

ניתן גם

$$1.3017 = 1.02^t$$
$$t = \ell og_{1.02} 1.3017$$
$$t = \frac{\ell og 1.3017}{\ell og 1.02} = 13.31$$

תשובה לאחר 13.31 **חודשים שוב יהיו בחשבונו של יובל** $10,000$ **שקל.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\frac{3}{2x}+\frac{2x}{3}}$ **בתחום** $x>0$ **. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון.**



$$\boxed{f'(x)=-\frac{3}{2x^2}+\frac{2}{3}}$$

$$0=-\frac{3}{2x^2}+\frac{2}{3}\quad\rightarrow 0=-9+4x^2$$

$$x=1.5\quad\leftarrow x>0$$

$$\boxed{f''(x)=+\frac{6x}{2x^4}}\quad\rightarrow f''(1.5)=\frac{6\cdot1.5}{2\cdot1.5^4}>0\quad\rightarrow Min$$

נמצא את שיעור ה- y **:** $f(1.5)=\frac{3}{2\cdot1.5}+\frac{2\cdot1.5}{3}=2$,

לכן נקודת המינימום היא $(1.5,2)$ **ומשוואת המשיק היא** $y=2$.

נמצא את שיעור ה- x **של נקודת החיתוך בין הפונקציה לישר** $y=2\frac{1}{6}$.

$$2\frac{1}{6}=\frac{3}{2x}+\frac{2x}{3}\quad /:6x\quad\rightarrow 13x=9+4x^2$$

$$4x^2-13x+9=0\quad\rightarrow x_{1,2}=\frac{13\pm5}{8}\quad\rightarrow x=2.25,1$$

ולכן $x=1$ **, כי נקודה זו קרובה יותר לציר ה-** y .

נחלק את השטח המבוקש לשני חלקים.

משמאל S_1 **שטח של מלבן, שרוחבו** $2\frac{1}{6}-2=\frac{1}{6}$ **ואורכו** $1-0=1$ **. ובהתאם שטחו:** $1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

מימין השטח שבין הפונקציה, והמשיק בתחום $1\le x\le1.5$.

$$S_2=\int_1^{1.5}\left(\frac{3}{2x}+\frac{2x}{3}-2\right)dx$$

$$S_2=\frac{3\ell n|2x|}{2}+\frac{x^2}{3}-2x\Big]_1^{1.5}$$

$$S_2=\left(\frac{3\ell n|2\cdot1.5|}{2}+\frac{1.5^2}{3}-2\cdot1.5\right)-\left(\frac{3\ell n|2\cdot1|}{2}+\frac{1^2}{3}-2\cdot1\right)$$

$$S_2=\left(1.5\ell n3-\frac{9}{4}\right)-\left(1.5\ell n2-\frac{5}{3}\right)=-0.602-(-0.6269)$$

$$\boxed{S_2=1.5\ell n1.5-\frac{7}{12}\approx0.02486}\quad\rightarrow\boxed{S=0.02486+\frac{1}{6}=0.1915}$$

תשובה: השטח המבוקש הוא $1.5\ell n1.5-\frac{5}{12}\approx0.1915$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-2\cos(2x)+a$ **בתחום** $0\le x\le \frac{5}{6}\pi$ **,** $0<a<2$ **פרמטר.**

נקודות הקצה: $(0,a-2)$ **,** $(\frac{5\pi}{6},a-1)$.

$$\boxed{f'(x)=4\sin 2x}$$

$$\sin 2x=0$$

$$2x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{2}k$$

$$k=0 \quad \to x=0 \quad \to edge$$

$$k=1 \quad \to x=\frac{\pi}{2} \quad \to f(\frac{\pi}{2})=-2\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})+\mathrm{a}=a+2 \quad \to(\frac{\pi}{2},a+2)$$

נמצא את שיעורי נקודת המינימום והמקסימום המוחלט, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$
y	$a-2$		$a+2$		$a-1$
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min

ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון, מקטן לגדול : $a-2<a-1<a+2$.

תשובה: $(0,a-2)$ **מינימום מוחלט ,** $(\frac{\pi}{2},a+2)$ **מקסימום מוחלט.**

ב. הישר $y=3$ **משיק לגרף הפונקציה. שיפועו** 0 **ולכן קיימים, שני** x**-ים בתחום**

בהם הנגזרת מתאפסת. $x=0$ **ו-** $x=\frac{\pi}{2}$.

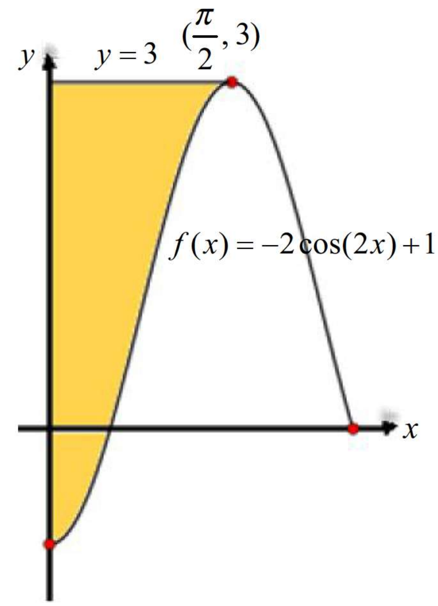
עבור $x=0$ **המשיק הוא חד-צדדי (כי הפונקציה מוגדרת עבור** $0\le x\le \frac{5}{6}\pi$**).**

במקרה זה $a-2=3$ **ובמקרה זה** $a=5$ **נפסל כי** $0<a<2$.

עבור $x=\frac{\pi}{2}$ **נקבל ש-** $a+2=3$ **ו-** $a=1$ **, מתאים.**

תשובה: $a=1$.

ג. נציב $a=1$ ונסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=-2\cos(2x)+1$.



ד. נחשב את גודל השטח (הצהוב).

הפרש פונקציות:

$$3-(-2\cos(2x)+1)=3+2\cos(2x)-1=2+2\cos(2x)$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos(2x))\,dx$$

$$S=(2x+\frac{2\sin 2x}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S=(2\cdot\frac{\pi}{2}+\sin(\frac{2\pi}{2}))-(2\cdot 0+\sin(0))$$

$$S=(\pi)-(0)$$

$$\boxed{S=\pi}$$

תשובה: גודל השטח הוא π .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(a-3x)e^{3x}$

תשובה: תחום ההגדרה כל x .

ב. שיעור ה- x **בנקודת הקיצון הוא** 1 **, לכן** $f'(1)=0$.

$$f'(x)=-3e^{3x}+(a-3x)\cdot 3e^{3x}$$
$$0=-3e^{3}+(a-3)3e^{3} \quad /:3e^{3}>0$$
$$0=-1+a-3$$
$$\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$.

ג. נציב $a=4$ **ונקבל** $f(x)=(4-3x)e^{3x}$

שתי הצבות במחשבון ומסקנות: $f(10)=-2.78\cdot10^{14}\to-\infty,\quad f(-10)=3.18\cdot10^{-12}\to+0$,

לכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית עבור** $x\to-\infty$.

(1) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f'(x)=-3e^{3x}+(4-3x)\cdot 3e^{3x}$$
$$f'(x)=3e^{3x}(-1+4-3x)$$
$$f'(x)=3e^{3x}(3-3x)$$
$$0=3-3x \quad (3e^{3x}>0)$$
$$x=1 \quad \to y=(4-3\cdot1)e^{3\cdot1}=e^{3}$$
$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=(+)\cdot(3-3\cdot0)>0 \\ f'(2)=(+)\cdot(3-3\cdot2)<0 \end{array}\right\}(1,e^{3})\ Max$$

תשובה: $x>1$ **ירידה ,** $x<1$ **עלייה.**

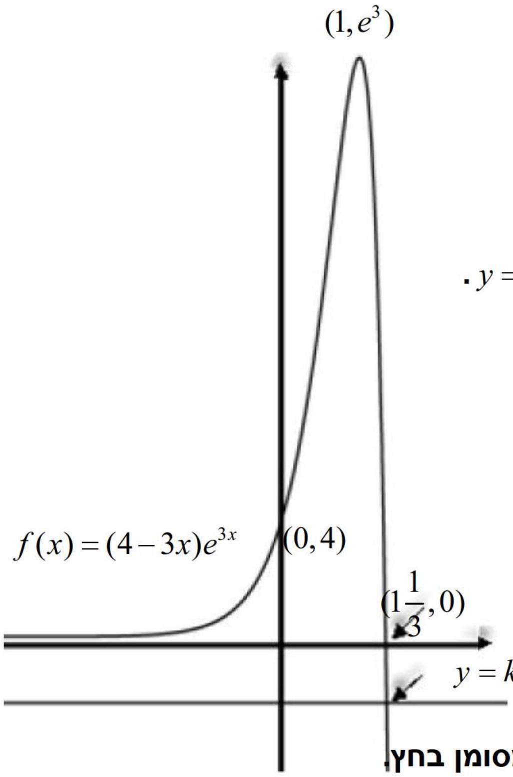
(2) בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y

מתקיים $x=0$ **ונקבל** $(0,4)\ \to\ y=(4-3\cdot0)e^{3\cdot0}=4$.

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$0=(4-3x)e^{3x} \quad /:e^{3x}>0$$
$$0=4-3x$$
$$x=1\frac{1}{3} \quad \to(1\frac{1}{3},0)$$

תשובה: $(0,4)$, $(1\frac{1}{3},0)$.



(3) הסקיצה המתאימה משמאל.

ד. הישר $y=k$ **מקביל לציר ה-** x **או מתלכד עימו.**

עבור $k\le0$ **הישר חותך את גרף הפונקציה פעם אחת בלבד, כמסומן בחץ.**

תשובה: פעם אחת.