א. המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר, המתחלק ב- 6 הוא 102.

המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר, המתחלק ב- 6 הוא 996 .

נמצא את מספר המספרים התלת-ספרתיים, המתחלקים ב- 6 ללא שארית.

סדרת האיברים המתחלקים ב- 6 ללא שארית היא חשבונית: $a_1=102,\ d=6$, כאשר $a_n=996$.

$$a_n=996$$
$$102+(n-1)\cdot 6=996$$
$$102+6n-6=996$$
$$6n=900$$
$$n=150$$

בסדרה זו 150 איברים.

$$S_{150}=\frac{150\cdot(102+996)}{2}=82,350$$

תשובה: הסכום הוא $82,350$.

ב. בסדרה ההנדסית האין-סופית: $\boxed{b_1=996}$, ו- $b_4=124.5$.

נמצא את מנת הסדרה.

$$b_4=124.5$$
$$b_1q^3=124.5$$
$$996q^3=124.5$$
$$q^3=\frac{1}{8}$$
$$\boxed{q=\frac{1}{2}}$$

נמצא את סכום הסדרה ההנדסית האין-סופית.

$$S=\frac{b_1}{1-q}$$
$$S=\frac{996}{1-\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{S=1992}$$

תשובה: הסכום הוא $1,992$.

ג. סכום כל האיברים שאחרי האיבר הראשון הוא $\frac{b_2}{1-q}=\frac{b_1q}{1-q}=\frac{b_1\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{b_1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=b_1$

ולכן האיבר הראשון בסדרה ההנדסית שווה לסכום של כל האיברים שאחריו.

תשובה: הוכח.

א. בסיס הפירמידה הישרה $SABC$ הוא משולש ישר זווית, שבו $\sphericalangle ACB = 90°$.

הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם,

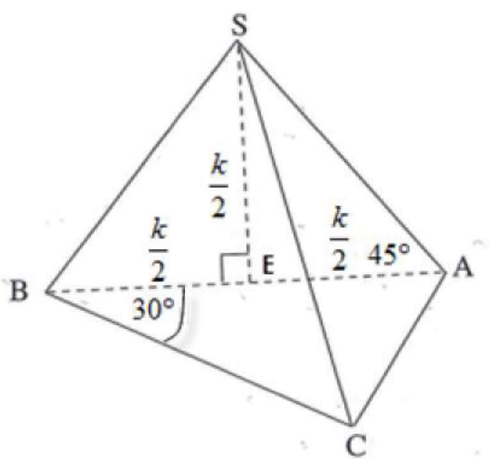
וכאשר הבסיס הוא משולש ישר זווית, הרי שמרכז המעגל החוסם הוא באמצע היתר.

נסמן ב- E את אמצע היתר AB , שאורכו k, ולכן SE הוא גובה הפירמידה, וגם גובה הפאה SAB.

נתון כי הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא בת $45°$,

ולכן $\sphericalangle SAE = 45°$ ו- ΔSAE הוא ישר זווית ושווה שוקיים, וגובה הפירמידה הוא $SE = AE = \frac{k}{2}$.

נתון גם כי $\sphericalangle ABC = 30°$.



<u>ΔABC</u>

$$\cos\sphericalangle ABC = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos 30° = \frac{BC}{k} \quad / \cdot k$$

$$\boxed{\frac{k\sqrt{3}}{2} = BC}$$

שטח הבסיס הוא: $\frac{AB \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle ABC}{2} = \frac{k \cdot k\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 30°}{2} = \frac{k^2\sqrt{3}}{8}$.

נפח הפירמידה הוא: $\frac{S_{\Delta ABC} \cdot SE}{3} = \frac{\frac{k^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{k}{2}}{3} = \frac{k^3\sqrt{3}}{48}$.

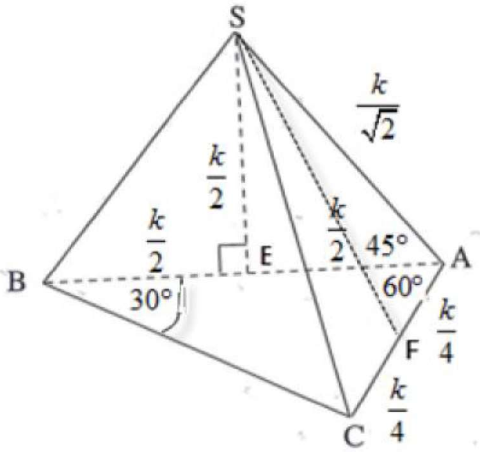
תשובה: נפח הפירמידה הוא $\frac{k^3\sqrt{3}}{48}$.

ב. נמצא את SA **, המקצוע הצדדי, באמצעות משפט פיתגורס ב-** ΔSAE **.**

$$SA=\sqrt{(SE)^2+(AE)^2}=\sqrt{(\frac{k}{2})^2+(\frac{k}{2})^2}=\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}}=\sqrt{\frac{k^2}{2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$$ **.**

ב- ΔABC **זוויות** $30°, 60°, 90°$ **ולכן הניצב הקצר שווה למחצית היתר, כלומר** $AC=\frac{AB}{2}=\frac{k}{2}$ **.**

נסמן ב- F **את אמצע מקצוע הבסיס** AC **, ולכן** $AF=\frac{AC}{2}=\frac{k}{4}$ **,**



ו- SF **הוא גובה לבסיס** AC **בפאה** SAC**.**

נמצא את SF **באמצעות משפט פיתגורס ב-** ΔSAF **.**

$$SF=\sqrt{(SA)^2-(AF)^2}=\sqrt{(\frac{k}{\sqrt{2}})^2-(\frac{k}{4})^2}=\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{k^2}{16}}=\sqrt{\frac{7k^2}{16}}=\frac{k\sqrt{7}}{4}$$

תשובה: הגובה לבסיס AC **בפאה** SAC **הוא** $\frac{k\sqrt{7}}{4}$ **.**

א. נתונות הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $x\ge 0$.

נתונה הפונקציה $g(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}$ גם בתחום $x\ge 0$ (למרות שתחום ההגדרה הרגיל שלה הוא כל x).

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, נגזרת שהיא חיובית עבור $x>0$, ולכן הפונקציה עולה עבור $x>0$ ויורדת לאף x .

$g'(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}\cdot \ell n(\frac{1}{2})$, כאשר $(\frac{1}{2})^{x-1}>0$ ו- $\ell n(\frac{1}{2})<0$.

לכן, הנגזרת שלילית עבור $x>0$, ולכן הפונקציה יורדת עבור $x>0$ ועולה לאף x .

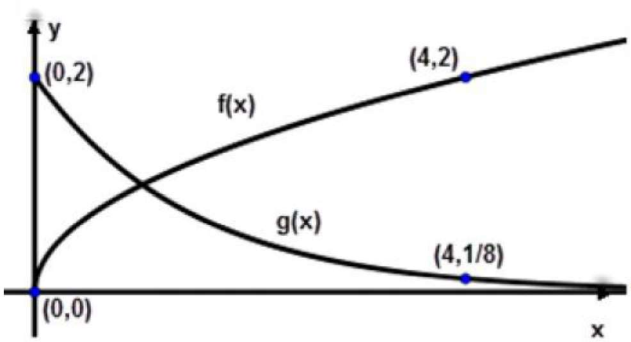
תשובה: $f(x)$ עולה עבור $x>0$ ויורדת לאף x . $g(x)$ יורדת עבור $x>0$ ועולה לאף x .

ב. לשתי הפונקציות נקודות קצה עבור $x=0$.

$f(0)=\sqrt{0}=0$, ובהתאם $(0,0)$ מינימום מוחלט, כי $f(x)$ עולה עבור $x>0$.

$g(0)=(\frac{1}{2})^{0-1}=(\frac{1}{2})^{-1}=2$, ובהתאם $(0,2)$ מקסימום מוחלט, כי $g(x)$ יורדת עבור $x>0$.

תשובה: $f(x)$: $(0,0)$ מינימום מוחלט. $g(x)$: $(0,2)$ מקסימום מוחלט.



ג. נבדוק את ערכי הפונקציות עבור $x=4$.

$f(4)=\sqrt{4}=2$.

$g(4)=(\frac{1}{2})^{4-1}=(\frac{1}{2})^{3}=\frac{1}{8}$.

מכאן ש- $f(4)>g(4)$ והגרף של $f(x)$ מעל לגרף של $g(x)$.

תשובה: הגרף של $f(x)$ מעל לגרף של $g(x)$.

ד. $g(0)>f(0)$ והגרף של $g(x)$ מעל לגרף של $f(x)$.

עבור $x=4$ הגרף של $f(x)$ מעל לגרף של $g(x)$.

לכן, הגרפים של שתי הפונקציות נפגשים בנקודה אחת, בתחום $0<x<4$.

כיוון שפונקציה אחת עולה והשנייה יורדת, שתיהן בתחום $x>0$, זו תהייה נקודת חיתוך יחידה.

תשובה: הגרפים של הפונקציות נפגשים.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin(2x)+2\cos x$ **בתחום** $0 \le x \le 2\pi$.

נמצא תחילה את נקודות הקצה.

$$f(0)=\sin(2\cdot 0)+2\cos 0=2 \quad \to \boxed{(0,2)}$$

$$f(2\pi)=\sin(2\cdot 2\pi)+2\cos 2\pi=2 \quad \to \boxed{(2\pi,2)}$$

k	$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$
0	$x=\frac{\pi}{6}$	-
1	$x=\frac{5\pi}{6}$	$x=\frac{3\pi}{2}$
2	$x=\frac{3\pi}{2}$	

$$\boxed{f'(x)=2\cos 2x-2\sin x}$$

$$0=2\cos 2x-2\sin x \quad /:2$$

$$0=\cos 2x-\sin x$$

$$\sin x=\cos 2x$$

$$\cos(90^\circ-x)=\cos 2x$$

$$90^\circ-x=2x+360^\circ k$$

$$-3x=90^\circ+360^\circ k \quad :(-3)$$

$$\boxed{x=30^\circ+120^\circ k}$$

$$90^\circ-x=-2x+360^\circ k$$

$$\boxed{x=-90^\circ+360^\circ k}$$

$$f(\frac{\pi}{6})=\sin(2\cdot\frac{\pi}{6})+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \to \boxed{(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

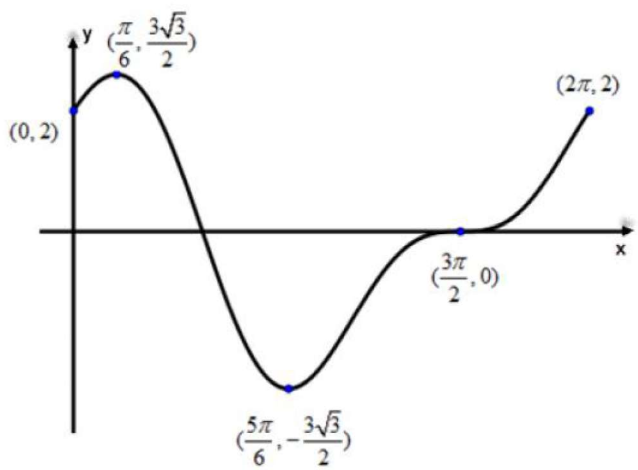
$$f(\frac{5\pi}{6})=\sin(2\cdot\frac{5\pi}{6})+2\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \to \boxed{(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

$$f(\frac{3\pi}{2})=\sin(2\cdot\frac{3\pi}{2})+2\cos\frac{3\pi}{2}=0 \quad \to \boxed{(\frac{3\pi}{2},0)}$$

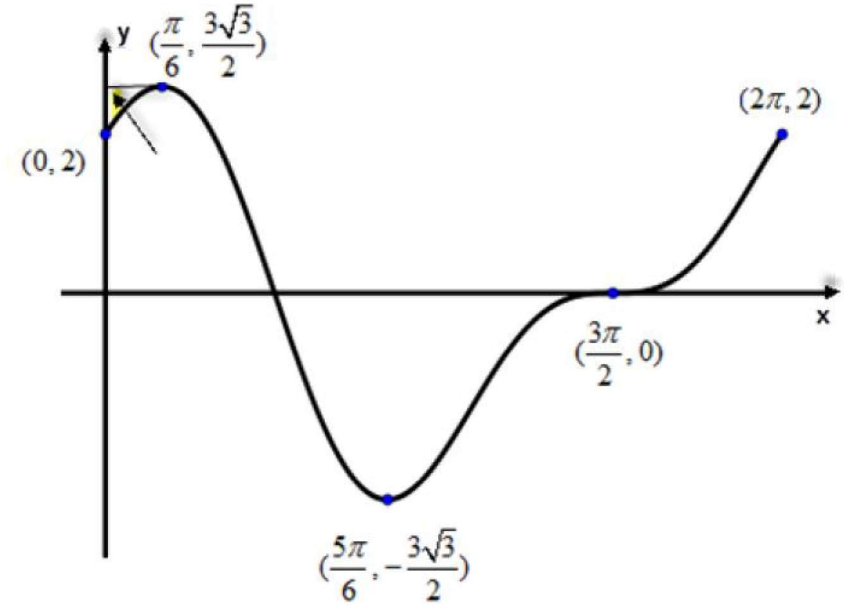
נבנה טבלה לזיהוי נקודות קיצון, בעזרת ערכי הפונקציה .

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x)$	2		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0		2
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	**פיתול**	↗	Max

תשובה: $(0,2)$ **,** $(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ **מינימום ,** $(2\pi,2)$ **,** $(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{2})$ **מקסימום.**



ג. משיק לגרף הפונקציה, בנקודת קיצון פנימית, הוא פונקציה קבועה ולכן משוואתו $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **.**



השטח המבוקש מסומן בחץ.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\frac{3\sqrt{3}}{2}-(\sin 2x+2\cos x))\,dx$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin 2x-2\cos x)\,dx$$

$$S=(\frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{\cos 2x}{2}-2\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$x=\frac{\pi}{6}:\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{6})}{2}-2\sin\frac{\pi}{6}=0.6103$$

$$x=0:\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 0+\frac{\cos(2\cdot 0)}{2}-2\sin 0=0.5$$

$$S=0.6103-0.5\quad\rightarrow\boxed{S=0.1103}$$

תשובה: גודל השטח הוא 0.1103 **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n(2x-ax^2)$ **(** a **הוא פרמטר).**

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ **הוא** $\frac{2}{3}$ **, ולכן** $f'(1)=\frac{2}{3}$ **.**

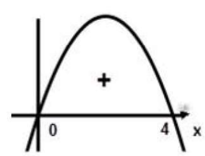
$$f'(x)=\frac{2-2ax}{2x-ax^2}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{2-2a\cdot 1}{2\cdot 1-a\cdot 1^2}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{2-2a}{2-a}$$
$$2(2-a)=3(2-2a)$$
$$4-2a=6-6a$$
$$4a=2$$
$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

תשובה: $a=\frac{1}{2}$ **.**

ב. נציב $a=\frac{1}{2}$ **והפונקציה היא** $f(x)=\ell n(2x-\frac{1}{2}x^2)$ **.**

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓn **יכולה לקבל מספרים חיוביים בלבד.**

$$2x-\frac{1}{2}x^2>0$$
$$4x-x^2>0$$
$$x(4-x)>0$$

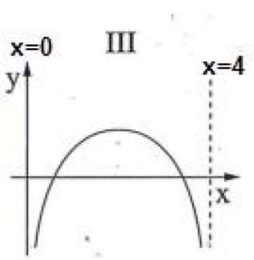


הגרף הוא של פרבולה הפוכה,

המתאפסת עבור $x=0, x=4$ **, וחיובית בתחום** $0<x<4$ **.**

תשובה: $0<x<4$ **.**

ג. נציב שני ערכי x **, ונוכל לזהות את הגרף המתאים.**



$$f(0.00001)=\ell n(2\cdot 0.00001-\frac{1}{2}\cdot 0.00001^2)=-10.82$$
$$f(3.99999)=\ell n(2\cdot 3.99999-\frac{1}{2}\cdot 3.99999^2)=-5.92$$

ולכן הגרף המתאים הוא גרף III **, שהוא שלילי בנקודות אלו,**

וכמובן תחום ההגדרה תואם $0<x<4$ **וגם שתי האסימפטוטות האנכיות** $x=0, x=4$ **.**

ניתן לזהות גם שכאשר $x=1$ **הגרף בעלייה, ומתאים לשיפוע חיובי (** $\frac{2}{3}$ **).**

תשובה: גרף III **.**