א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית, שכל איבריה חיוביים. לכן, $a_n > 0$ **, ומנתה** $0 < q < 1$ **.**

$$a_3 = 8a_6$$
$$a_1q^2 = 8a_1q^5 \quad / : 8a_1q^2 > 0$$
$$\frac{1}{8} = q^3$$
$$\boxed{q = 0.5}$$

נראה שסדרת האיברים במקומות הזוגיים הנדסית.

$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_nq^2}{a_n} = q^2$ **, המנה בין כל שני איברים במקומות הזוגיים (או אי-זוגיים) קבועה (אינה תלויה ב-** n**).**

ובהתאם זו סדרה הנדסית אינסופית, שמנתה $q^2 = 0.25$ **, ואיברה הראשון** $a_2 = a_1q = 0.5a_1$ **.**
נחשב את היחס המבוקש, תוך כדי כפל בהופכי.

$$\frac{S}{S_{\text{even}}} = \frac{\frac{a_1}{1-0.5}}{\frac{0.5a_1}{1-0.25}}$$
$$\frac{S}{S_{\text{even}}} = \frac{a_1}{0.5} \cdot \frac{0.75}{0.5a_1}$$
$$\boxed{\frac{S}{S_{\text{even}}} = 3}$$

תשובה: פי שלושה.

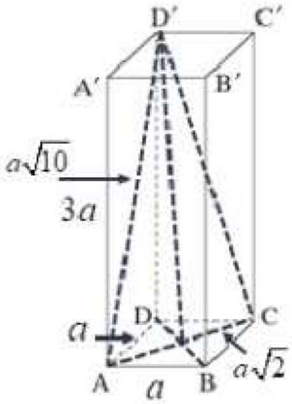
ב. הראינו כבר שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים הנדסית מתכנסת, ומנתה $q^2 = 0.25$ **ואיברה הראשון** a_1 **.**

$$S_{\text{Odd}} = 2$$
$$\frac{a_1}{1-0.25} = 2$$
$$\boxed{a_1 = 1.5}$$

ובהתאם $a_3 = a_1q^2 = 1.5 \cdot 0.25 = 0.375$ **.**

תשובה: ערכו של האיבר השלישי בסדרה הנתונה הוא 0.375 **.**

א. (1) בסיס התיבה הוא ריבוע שזוויותיו שוות ל- 90°**, וצלעותיו שוות זו לזו, ואורכן** a **.**



ΔABC **על פי משפט פיתגורס:**

$$(AC)^2 = a^2 + a^2$$
$$(AC)^2 = 2a^2$$
$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$

פאות התיבה הריבועית הן מלבנים חופפים,

שזוויותיהם שוות ל- 90°**, וממדיהם** a **ו-** $3a$ **.**

$\Delta AA'D'$ **על פי משפט פיתגורס:**

$$(AD')^2 = a^2 + (3a)^2$$
$$(AD')^2 = 10a^2$$
$$\boxed{AD' = a\sqrt{10}}$$

תשובה: $AC = a\sqrt{2}$ **,** $AD' = a\sqrt{10}$ **.**

(2) כיוון שבסיס התיבה ריבוע, כל הפאות חופפות זו לזו, ומכאן שאלכסוני הפאות שווים זה לזה.

תשובה: $AD' = CD'$ **, כי הם אלכסוני מלבנים חופפים.**

ב. $\sphericalangle AD'C$ **היא זווית הראש במשולש שווה שוקיים** $AD'C$ **.**

נוריד $D'E$ **גובה לבסיס המשולש, שהוא גם תיכון (** E **מפגש אלכסוני הריבוע), וגם חוצה זווית הראש.**

$AD'E$ **:**

$$\sin \sphericalangle AD'E = \frac{AE}{AD'} = \frac{0.5a\sqrt{2}}{a\sqrt{10}}$$
$$\sphericalangle AD'E 12.92^\circ$$
$$\boxed{\sphericalangle AD'C = 25.84^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle AD'C = 25.84^\circ$ **.**

ג. נחשב את שטח משולש $\sphericalangle AD'C$**.**

$$\sphericalangle D'AC = \frac{180^\circ - 25.84^\circ}{2} = 77.08^\circ$$
$$S_{\Delta SBC} = \frac{AC \cdot AD' \cdot \sin \sphericalangle D'AC}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 77.08^{\circ\circ}}{2} = 2.179a^2$$

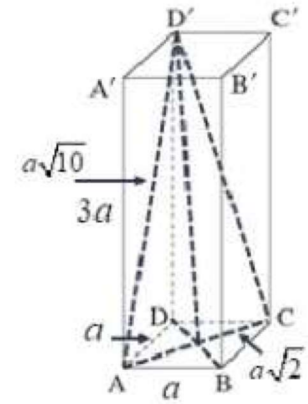
תשובה: שטח משולש $\sphericalangle AD'C$ **הוא** $2.179a^2$**.**

ד. $\Delta DD'E$ **:**

$$\tan\sphericalangle D'DE=\frac{D'D}{DE}=\frac{3a}{0.5a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sphericalangle D'DE=76.74^\circ}$$

תשובה: הזווית שבין D'E **לבין בסיס התיבה** ABCD **היא בת** 76.74° **.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=3\cdot\sin(x-\frac{\pi}{2})$ **בתחום** $-\pi\le x\le\pi$ **.**

תזכורת, כאשר למדנו את נושא הפרבולה ידענו שזו הזזה ימינה וכיווץ, כך גם בפונקציות טריגונומטריות. אבל, נפתור בדרך הרגילה. תוך שימוש בזהויות טריגונומטריות.

$$f(x)=3\cdot\sin(x-\frac{\pi}{2})$$

$$f(x)=-3\sin(\frac{\pi}{2}-x)\quad\leftarrow\sin(-x)=-\sin x$$

$$\boxed{f(x)=-3\cos x}\quad\leftarrow\sin(90^\circ-x)=\cos x$$

(1) בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=-3\cdot\cos 0=-3\quad\rightarrow(0,-3)$ **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$-3\cos x=0$$

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\qquad\qquad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$k=0\quad x=\frac{\pi}{2}\quad\rightarrow(\frac{\pi}{2},0)\qquad\qquad x=\frac{\pi}{2}\quad\rightarrow(-\frac{\pi}{2},0)$$

תשובה: $(0,-3)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},0)$**.**

(2) נמצא תחילה את נקודות הקצה.

$$f(-\pi)=-3\cos(-\pi)=3\quad\rightarrow\boxed{(-\pi,3)}$$

$$f(\pi)=-3\cos(\pi)=3\quad\rightarrow\boxed{(\pi,3)}$$

נמצא נקודות קיצון פנימיות.

$$\boxed{f'(x)=3\sin x}$$

$$0=3\sin x$$

$$\sin x=0$$

$$x=0+2\pi k\quad k=0\quad x=0\quad\rightarrow(0,-3)$$

$$x=\pi+2\pi k\quad k=0\quad x=\pi(edge\ point)$$

$$k=-1\quad x=-\pi(edge\ point)$$

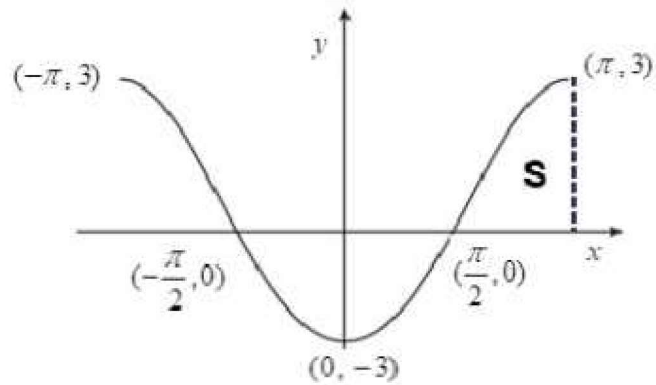
($edge\ point$ **- נקודת קצה)**

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	$-\pi$		0		π
$f(x)$	3		-3		3
$f'(x)$					
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(\pi,3)$ **,** $(-\pi,3)$ **מקסימום ,** $(0,-3)$ **מינימום.**

ב. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח, עבור סעיף ג):



ג. נחשב את השטח, המסומן ב- S.

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-3\cos x-0)\,dx$$

$$S=(-3\sin x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$x=\pi:\quad 0$$

$$x=\frac{\pi}{2}:\quad -3$$

$$S=0-(-3)$$

$$\boxed{S=3}$$

תשובה: גודל השטח 3 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=4^{2x}-4^{x}-2$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x .

(2) בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=4^{2\cdot 0}-4^{0}-2=-2 \quad \to (0,-2)$.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **. נסמן** $4^{x}=t$.

$$4^{2x}-4^{x}-2=0$$
$$t^{2}-t-2=0$$
$$t=2 \quad \to 4^{x}=2 \quad \to 2^{2x}=2 \quad \to 2x=1 \quad \to x=0.5 \quad \to (0.5,0)$$
$$t=-1 \quad \to impossible$$

תשובה: $(0,-2)$ **,** $(0.5,0)$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$

$$f'(x)=2\cdot 4^{2x}\cdot \ell n\, 4-4^{x}\cdot \ell n\, 4$$
$$f'(x)=(2\cdot 4^{2x}-4^{x})\ell n\, 4$$
$$0=2\cdot 4^{2x}-4^{x}$$
$$0=4^{x}(2\cdot 4^{x}-1)$$
$$2\cdot 4^{x}-1=0$$
$$4^{x}=\frac{1}{2}$$
$$2^{2x}=2^{-1}$$
$$x=-\frac{1}{2} \quad \to y=4^{2\cdot(-0.5)}-4^{-0.5}-2=-2.25 \quad \to (-\frac{1}{2},-2.25)$$
$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)=(2\cdot 4^{2\cdot(-1)}-4^{(-1)})\ell n\, 4=-0.17<0 \\ f'(0)=(2\cdot 4^{2\cdot 0}-4^{0})\ell n\, 4=1.38>0 \end{array}\right\} (-\frac{1}{2},-2.25), Min$$

תשובה: $(-\frac{1}{2},-2.25)$ **, מינימום.**

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=-2f(x)$, שסימניה הפוכים מאלו של $f(x)$, בגלל ההכפלה במספר שלילי.

$g'(x)=-2f'(x)$, ובהתאם סימני הנגזרת משתנים (אך $g'(x)=0$ כאשר $f'(x)=0$),

והמשמעות: תחומי עלייה וירידה מתהפכים, ונקודות הקיצון מחליפות סוג.

(1) $x=-0.5$ **יהיה מקסימום.** $g(-0.5)=-2f(-0.5)=-2\cdot(-2.25)=4.5$.

תשובה: $(-\frac{1}{2},4.5)$ **מקסימום.**

(2) עבור x **ששואף לשמאל,** $x\to-\infty$**, יש אסימפטוטה אופקית, כמתואר בציור :** $y=4$.

בצורה דומה, קיימת אסימפטוטה אופקית ל $f(x)$ **, נסמנה ב-** $y=k$.

$$4=-2\cdot k$$
$$k=-2$$

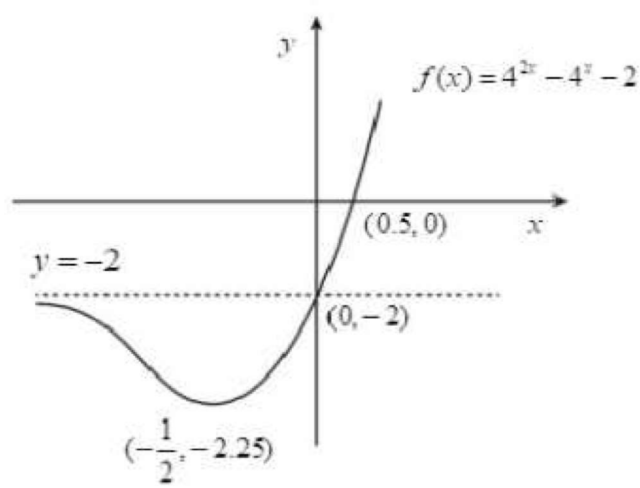
ניתן גם להציב: $f(-10)=4^{2\cdot(-10)}-4^{-10}-2=-2.0000009$ **,**

וזו גם הוכחה לקיומה של האסימפטוטה, וגם לעובדה שמגיעים אליה מתחתיה, וזה עוזר לציור.

וגם: $f(10)=4^{2\cdot10}-4^{10}-2=+1.1\cdot10^{12}\to+\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

תשובה: משוואת האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ **היא** $y=-2$.

(3) הסקיצה המתאימה של $f(x)$ **:**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2\ell n\,x+3}{3}$ **.**

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס

תשובה: $x>0$ **.**

(2) $x=0$ **לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** y **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$0=\frac{2\ell n\,x+3}{3}$$
$$0=2\ell n\,x+3$$
$$\ell n\,x=-1.5$$
$$x=e^{-1.5}\approx 0.223 \quad \rightarrow (0.223,0)$$

תשובה: $(0.223,0)$ **נקודת חיתוך עם ציר ה-** x **.**

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x)=\frac{2\ell n\,x+3}{3}=\frac{1}{3}\cdot(2\ell n\,x+3)$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{x}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2}{3x}}$$

והנגזרת חיובית, בתחום ההגדרה.

תשובה: עלייה $x>0$**, ירידה אף** x **.**

(4) שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות.

$$f(0.0000001)=-9.74\rightarrow-\infty,\quad f(100,000)=10.21\rightarrow+\infty$$

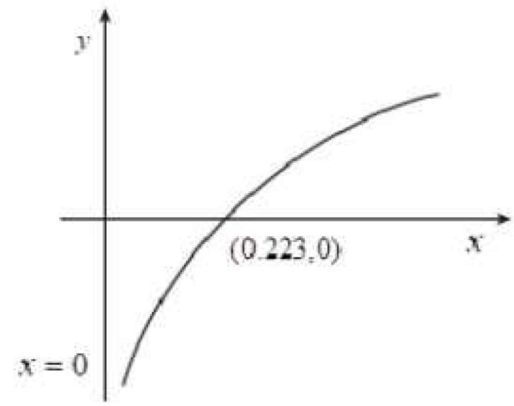
ניתן להציב מספרים קרובים יותר לאפס ולמספרים הגדולים, ולהבין את המשמעות.

אסימפטוטה אנכית $x=0$ **.**

מימין אין אסימפטוטה אופקית, כאשר הגרף יסיים בעלייה.

תשובה: $x=0$**.**

(5) סקיצה של $f(x)=\frac{2\ell n\,x+3}{3}$ **.**



ב. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{2}{3x}$ **.**

תחום ההגדרה שלה נשאר $x>0$**, כי היא נגזרת של פונקציה שזה היה תחום ההגדרה שלה,**

ובתחום זה, המכנה של $f'(x)=\frac{2}{3x}$ **לא מתאפס.**

(1) שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות.

$$f'(0.001)=666\to+\infty,\quad f(100,000)=6\cdot10^{-6}\to+0$$

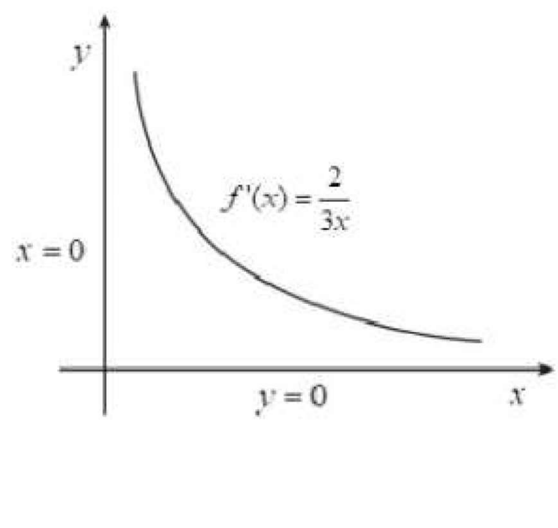
אסימפטוטה אנכית $x=0$ **(נימוק אלטרנטיבי - מאפס מכנה ולאמונה).**

אסימפטוטה אופקית $y=0$ **(נימוק אלטרנטיבי - חזקת מונה (0) קטנה מחזקת מכנה (1)).**

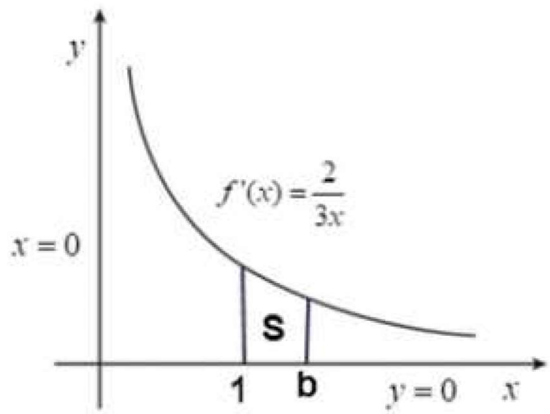
תשובה: $x=0$ **,** $y=0$ **.**

(2) נשים לב, ש $f(x)$ **עולה, ולכן** $f'(x)$ **חיובית.**

סקיצה מתאימה של גרף הנגזרת.



ג. נחשב את השטח, המסומן ב- S, וגודלו שווה ל- $\ell n\,4$ **.**



$$S=\int_1^b (f'(x)-0)\,dx$$

$$S=f(x)\Big]_1^b$$

$$S=f(b)-f(1)$$

$$x=b:\quad f(b)=\frac{2\ell n\,b+3}{3}$$

$$x=1:\quad f(1)=\frac{2\ell n\,1+3}{3}=1$$

$$S=\frac{2\ell n\,b+3}{3}-1$$

$$\ell n\,4=\frac{2\ell n\,b+3}{3}-1$$

$$3\ell n\,4=2\ell n\,b+3-3$$

$$3\ell n\,4=2\ell n\,b$$

$$1.5\ell n\,4=\ell n\,b$$

$$\ell n\,4^{1.5}=\ell n\,b$$

$$\ell n\,8=\ell n\,b$$

$$\boxed{b=8}$$

תשובה: $b=8$.