א. נתונה סדרה הנדסית a_n **שבה** $a_2 = 6$ **,** $a_5 = 162$**.**

$$\begin{cases} a_5 = 162 \\ a_2 = 6 \end{cases}$$

$$: a_1 q \neq 0 \begin{cases} a_1 q^4 = 162 \\ a_1 q = 6 \end{cases}$$

$$q^3 = 27 \quad \rightarrow \boxed{q = 3} \quad \rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

תשובה: מנת הסדרה היא 3 **,** $a_1 = 2$

ב. נתון כי סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא $S_{odd} = 1640$ **.**

	אי-זוגיים
A_1	$a_1 = 2$
Q	$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2 = 9$
N	n

$$S_{odd} = 1640$$

$$\frac{2(9^n - 1)}{9 - 1} = 1640$$

$$9^n - 1 = 6560$$

$$9^n = 6561$$

$$\boxed{n = 4}$$

תשובה: בסדרה 4 **איברים במקומות האי-זוגיים.**

ג. נתון כי בסדרה מספר אי-זוגי של איברים,

ולכן בסדרה 4 איברים במקומות האי-זוגיים, ו- 3 איברים במקומות הזוגיים.

	זוגיים
A_1	$a_2 = 2\cdot 3 = 6$
Q	$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2 = 9$
N	3

$$S_{even} = \frac{6\cdot(9^3-1)}{9-1} = 546$$

תשובה: סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 546.

ד. (1) נתונה סדרה הנדסית b_n שבה $b_2 = \frac{5}{a_2} = \frac{5}{6}$ **,** $b_1 = \frac{5}{a_1} = \frac{5}{2} = 2.5$ **.**

$$q_b = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{5}{6}}{2.5} = \frac{1}{3} \text{ .}$$

תשובה: מנות הסדרה b_n היא $\frac{1}{3}$.

(2) $-1 < q < 1$ **, ונוסחת הסכום של אין-סוף איברי הסדרה היא** $S = \frac{b_1}{1-q_b}$**.**

$$S = \frac{b_1}{1-q_b}$$
$$S = \frac{2.5}{1-\frac{1}{3}}$$
$$\boxed{S = 3.75}$$

תשובה: סכום הסדרה b_n הוא 3.75.

א. בקובייה כל המקצועות שווים, כאשר a אורך מקצוע הקובייה.

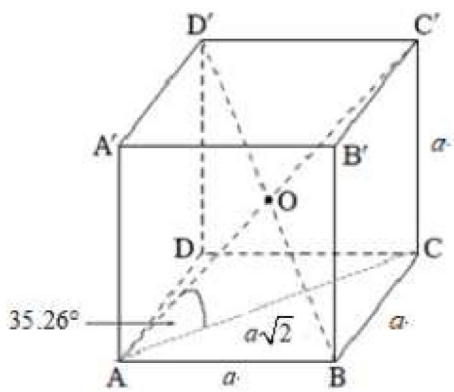
(1) נחשב את אורך אלכסון הבסיס.

$$\underline{\Delta ABC : \text{Pythagoras}}$$
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(AC)^2 = a^2 + a^2$$
$$(AC)^2 = 2a^2$$
$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$

תשובה: אורך אלכסון הבסיס AC **הוא** $a\sqrt{2}$**.**

(2) הזווית שבין AC' **לבסיס** $ABCD$ **היא** $\sphericalangle C'AC$**,**

הזווית שבין המשופע AC' **להיטל שלו לבסיס,** AC**.**



$$\underline{\Delta C'CA : \quad (\sphericalangle C'CA = 90°)}$$
$$\tan\sphericalangle C'AC = \frac{CC'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$$
$$\boxed{\sphericalangle C'AC = 35.26°}$$

תשובה: הזווית שבין AC' **לבסיס** $ABCD$ **היא בת** $35.26°$**.**

ב. נחשב את אורך אלכסון הקוביה, AC' **.**

$$\underline{\Delta ACC' : \text{Pythagoras}}$$
$$(AC')^2 = (AC)^2 + (CC')^2$$
$$(AC')^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$
$$(AC')^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$
$$\boxed{AC' = a\sqrt{3}}$$

תשובה: אורך אלכסון הקוביה, AC'**, הוא** $a\sqrt{3}$**.**

ג. אלכסוני הקוביה, החוצים זה את זה ושווים זה לזה, יוצרים מלבן, $ABC'D'$.

גם אלכסוני הפאות, בקובייה, הם $a\sqrt{2}$**.**

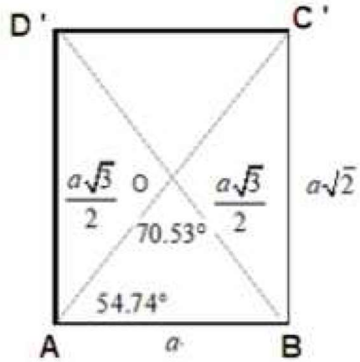
$$\underline{\Delta ABC': \quad (\sphericalangle ABC' = 90°)}$$

$$\tan \sphericalangle C'AB = \frac{BC'}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a}$$

$$\sphericalangle C'AB = 54.74° \quad \rightarrow \sphericalangle AOB = 180 - 2 \cdot 54.74°° = 70.53°$$

$$\boxed{\sphericalangle AOB = 70.53°}$$

תשובה: הזווית החדה שבין האלכסונים היא בת $70.53°$**.**



ד. כאמור, אלכסוני הקוביה חוצים זה את זה, לכן $AO = BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **.**

$$S_{\Delta AOB} = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin \sphericalangle AOB}{2}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \sphericalangle 70.53°}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta AOB} = 0.3536a^2}$$

תשובה: $S_{\Delta AOB} = 0.3536a^2$**.**

ה. נתון כי $S_{\Delta AOB} = 4\sqrt{2}$**.**

$$0.3536a^2 = 4\sqrt{2}$$

$$a^2 = 16$$

$$\boxed{a = 4}$$

תשובה: $a = 4$**.**

.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^2 x+6$, **המוגדרת בתחום** $-\pi \le x \le \pi$.

נשים לב שהפונקציה חיובית לכל x **, ובפרט בתחום הנתון** $-\pi \le x \le \pi$ **,**

וגם שהפונקציה זוגית, כלומר שהגרף שלה סימטרי לציר ה- y **.**

נקודת חיתוך עם ציר ה- y **היא** $(0,6) \leftarrow f(0)=\sin^2 0+6=6$ **.**

תשובה: נקודת החיתוך היחידה עם הצירים היא $(0,6)$**.**

ב. נקודות קצה: $(\pi,6)$**,** $(-\pi,6)$**. (מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)**

$f'(x)=2\sin\cos x$

$\boxed{f'(x)=\sin 2x}$

$0=\sin 2x$

$2x=\pi k$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}k}$

$x=0,\pm\frac{\pi}{2}$ **פתרונות פנימיים:** $\boxed{(-\frac{\pi}{2},7)}$, $\boxed{(\frac{\pi}{2},7)} \leftarrow f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=\sin^2(\frac{\pi}{2})+6=7$.

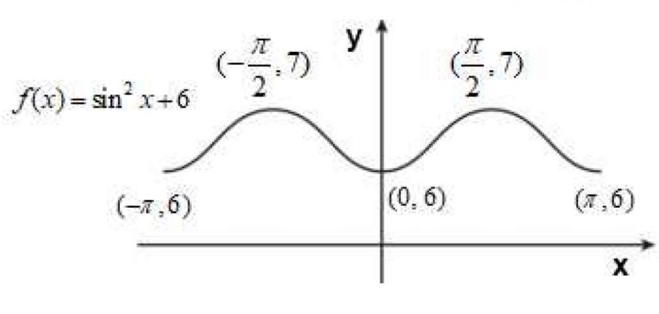
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה

(סימני הנגזרת הוספו, עבור סעיף ד):

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	6		7		6		7		6
$f'(x)$		+		-		+		-	
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(\pi,6)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{2},7)$ **מקסימום,** $(0,6)$ **מינימום,** $(-\frac{\pi}{2},7)$ **מקסימום ,** $(-\pi,6)$ **מינימום.**

ג. הסקיצה המתאימה:

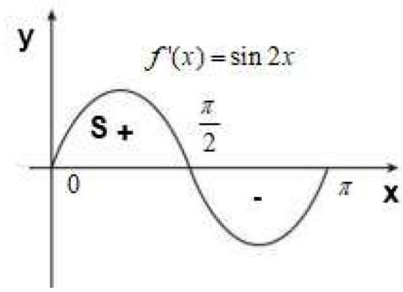


ד. (1) נצייר את גרף הנגזרת, את $f'(x)=\sin 2x$, בתחום $0\le x\le \pi$.

ניעזר בסימני הנגזרת, והנקודות בהן היא מתאפסת, מסעיף ב.

נקודות קצה: $(\pi,0)$, $(-\pi,0)\leftarrow$ $f'(\pi)=f'(-\pi)=0$

הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח עבור תת-סעיף ד(2) היא:



(2) נחשב את השטח, המבוקש.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f'(x)-0)\,dx$$

$$S=f(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$s=f(\frac{\pi}{2})-f(0)$$

$$S=7-6$$

$$\boxed{S=1}$$

תשובה: גודל השטח הוא 1 יח"ר.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(x+2)e^{x+3}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x **.**

ב. $e^{x+3}>0$ **לכל** x**, ולכן הביטוי האלגברי** $x+2$ **קובע את סימני הפונקציה,**

כאשר $(-2,0)$ **נקודת חיתוך עם ציר ה-** x**.**

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **חיובית עבור** $x>-2$ **(ושלילית עבור** $x<-2$**).**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

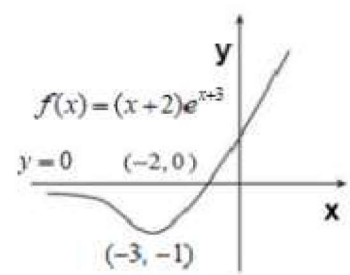
$$f'(x)=e^{x+3}+(x+2)e^{x+3}$$
$$f'(x)=e^{x+3}(1+x+2)$$
$$\boxed{f'(x)=e^{x+3}(x+3)}$$
$$x+3=0 \quad \rightarrow \boxed{(-3,\,-1)}$$

על פי ערכי הפונקציה מימין $(-2,0)$ **ומשמאל** $(-4,-0.736)$ **מתקבל ש-** $(-3,-1)$ **מינימום.**

(בנוסף, שקיימת אסימפטוטה אופקית $y=0$ **, עבור** $x\rightarrow-\infty$ **.)**

תשובה: $(-3,-1)$ **מינימום .**

ד. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=(x+2)e^{x+3}$**.**



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+a$ **, שהיא הזזה אנכית ב-** a **יחידות, של** $f(x)$ **.**

הישר $y=0.5$ **מקביל לציר ה-** x**,**

כמו הישר $y=-1$**, שמקביל לציר ה-** x**, ומשיק בנקודת המינימום של** $f(x)$ **.**

לכן, $g(x)=f(x)+a$ **היא הזזה של** $f(x)$ **ב-** 1.5 **יחידות כלפי מעלה ומכאן ש-** $a=1.5$**.**

תשובה: $a=1.5$**.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=2\ell n\, x+2\ell n\,(x^2)-3}$ **.**

בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x^2\neq 0 \quad \rightarrow x\neq 0$ **.**

וגם $x>0$ **, בגלל המחובר האמצעי.**

תשובה: $x>0$ **.**

ב. נעבד את תבנית הפונקציה על פי חוקי הלוגריתמים, ובפרט על ידי $\ell og_b\,(b^t)=t\cdot \ell og_b\, b$ **.**

$$f(x)=2\ell n\, x+2\ell n\,(x^2)-3$$
$$f(x)=2\ell n\, x+4\ell n\, x-3$$
$$\boxed{f(x)=6\ell n\, x-3}$$

ניתן היה לבצע עיבוד זה, רק בגלל שתחום ההגדרה היה $x>0$ **, ולכן לא נפסיד פתרונות שליליים.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$6\ell n\, x-3=0$$
$$6\ell n\, x=3$$
$$6\ell n\, x=0.5$$
$$x=e^{0.5}=\sqrt{e}$$
$$\boxed{(\sqrt{e},0)}$$

תשובה: $(\sqrt{e},0)$ **.**

ג. נמצא את תחומי העלייה והירידה.

$$\boxed{f(x)=6\ell n\, x-3}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{6}{x}}$$

הנגזרת חיובית בתחום ההגדרה $x>0$ **, ולכן הפונקציה עולה בתחום זה.**

תשובה: עלייה - $x>0$ **, ירידה - אף** x **.**

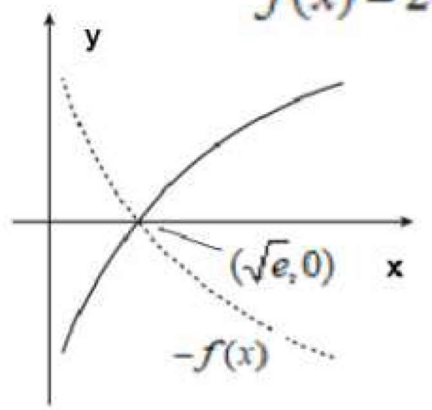
ד. לפני הסקיצה, שתי הצבות ליתר ביטחון.

כאשר $x \to +\infty$ **, למשל** $f(10,000) = 52.26 \to +\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x \to 0^+$ **, למשל** $f(0.00001) = -86 \to -\infty$ **ו-** $x = 0$ **אסימפטוטה אנכית.**

סקיצה מתאימה, כולל עבור סעיף ה:

$$f(x) = 2\ln x + 2\ln(x^2) - 3$$



ה. $-f(x)$ **סימטרית ל-** $f(x)$ **, כאשר ציר הסימטריה הוא ציר ה-** x **, כי ערכי ה-** y **מחליפים סימן.**

כמובן ששתי הפונקציות נחתכות בנקודה $(\sqrt{e},0)$**.**

סקיצה מתאימה הובאה כבר בסעיף הקודם.