א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית, נסמנה a_n **שהמנה שלה היא** $\frac{1}{4}$ **, וסכומה** $9\frac{1}{3}$ **.**

מכיוון ש- $-1<q<1$ **, הסדרה מתכנסת וסכומה נתון על פי הנוסחה** $S=\frac{a_1}{1-q}$**.**

$$9\frac{1}{3}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$9\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=a_1$$

$$\boxed{a_1=7}$$

תשובה: $a_1=7$ **.**

ב. בין כל שני איברים סמוכים הוסיפו איבר חדש, כך שהתקבלה סדרה הנדסית חדשה.

נסמן את הסדרה b_n **, כך ש-** $b_n>0$ **(כי כל איבריה חיוביים), ומנתה בהתאם** $q_b>0$**.**

מכאן ש- $b_1=a_1$ **, ו-** $b_3=a_2$ **.**

$$b_1{q_b}^2=a_1q_a$$

$$b_1{q_b}^2=b_1\cdot\frac{1}{4}\quad /:b_1\neq 0$$

$${q_b}^2=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{q_b=\frac{1}{2}}\quad\leftarrow q_b>0$$

תשובה: מנת הסדרה החדשה היא $\frac{1}{2}$ **.**

ג. נבדוק את שתי הטענות.

I) $b_5 = a_{10}$ - **<u>הטענה אינה נכונה</u>, למעשה** $b_5 = a_3$**, או** $b_{19} = a_{10}$**.**

כיוון שהכניסו איבר בין כל שני איברים בסדרה המקורית,

בהכרח מיקום של איברים זהים (למעט הראשון), יהיה גדול יותר בסדרה החדשה.

II) $S_{even\,b} = \frac{1}{2}S_a$**.**

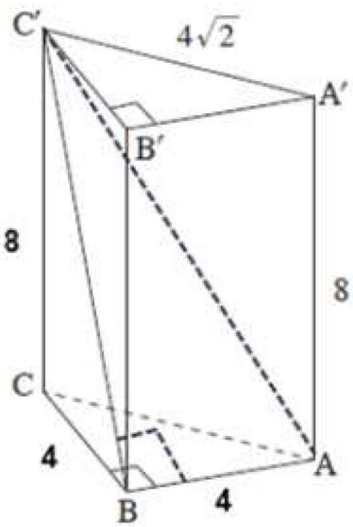
	a_n	**מקומות זוגיים בסדרה** b_n
A_1	$a_1 = 7$	$b_2 = b_1 q_b = 7 \cdot \frac{1}{2} = 3.5$
Q	$\frac{1}{4}$	$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{b_n {q_b}^2}{a_n} = {q_b}^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
N	**אינסוף**	**אינסוף**
S	$S_a = 9\frac{1}{3}$ **(נתון)**	$S_b = \frac{3.5}{1-\frac{1}{4}} = 4\frac{2}{3}$

מתקבל ש- $S_{even\,b} = \frac{1}{2}S_a$ **ולכן <u>טענה זו נכונה</u>.**

א. בסיס המנסרה הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים, $AB = BC$ **, שבו אורך היתר** $AC = 4\sqrt{2}$ **.**

הזווית שבין אלכסון הפאה $BCC'B'$ **ובין בסיס המנסרה היא** $\sphericalangle C'BC$ **.**

משפט פיתגורס ΔABC



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(4\sqrt{2})^2 = 2(BC)^2$$
$$16 = (BC)^2$$
$$\boxed{BC = AB = 4}$$

$\underline{C'BC'}$

$$\tan \sphericalangle C'BC = \frac{C'C}{BC} = \frac{8}{4}$$
$$\boxed{\sphericalangle C'BC = 63.43°}$$

תשובה: גודל הזווית הוא $63.43°$ **.**

ב. $\sphericalangle ABC' = 90°$ **(** AB **מאונך לפאה** $BCC'B'$ **כי המנסרה ישרה וכי** $AB \perp BC$ **).**

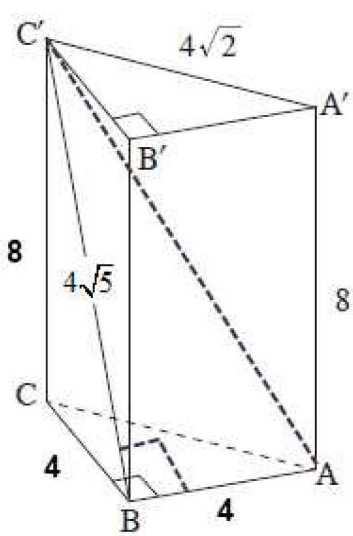
משפט פיתגורס $\Delta BCC'$

$$(BC')^2 = (BC)^2 + (CC')^2$$
$$(BC')^2 = 4^2 + 8^2 = 80$$
$$\boxed{BC' = 4\sqrt{5}}$$

$\underline{AC'B}$

$$\tan \sphericalangle AC'B = \frac{AB}{BC'} = \frac{4}{4\sqrt{5}}$$
$$\boxed{\sphericalangle AC'B = 24.09°}$$

תשובה: $\sphericalangle AC'B = 24.09°$ **.**



ג. נחשב את שטח המשולש $AC'B$ **, שטחו של משולש ישר זווית.**

$$S_{\Delta AC'B} = \frac{AB \cdot BC'}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 8\sqrt{5} \text{ .}$$

תשובה: $S_{\Delta AC'B} = 8\sqrt{5}$ **.**

ד. כיוון ש- $AB=BC$ **, הרי ששתי הפאות שעליהן חופפות, ולכן** $BA'=BC'=4\sqrt{5}$ **.**

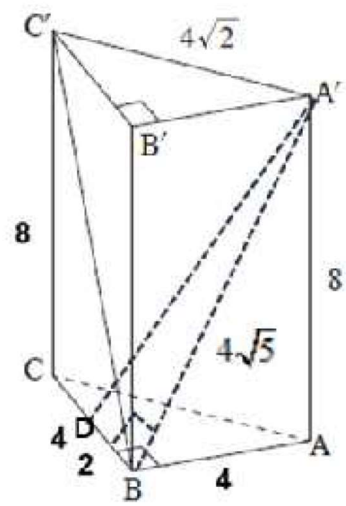
$BD=4:2=2$

$\sphericalangle CBA'=90^\circ$

משפט פיתגורס $\Delta BCA'$

$$(A'D)^2=(BD)^2+(BA')^2$$
$$(A'D)^2=2^2+(4\sqrt{5})^2$$
$$\boxed{A'D=2\sqrt{21}}$$

תשובה: $A'D=2\sqrt{21}$ **.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin 2x$, **המוגדרת בתחום** $0\le x\le \pi$ **.**

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$: $f(0)=\sin(2\cdot 0)=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$\sin 2x=0=\sin 0$$

$$2x=0+2\pi k \qquad 2x=\pi+2\pi k$$

$$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

הפתרונות בתחום הם $x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$

תשובה: $(\pi,0)$**,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(0,0)$**.**

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

נקודות קצה: $(\pi,0)$ **,** $(0,0)$ **.**

(מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)

$$\boxed{f'(x)=2\cos 2x}$$

$$0=\cos 2x=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

$$k=0:\boxed{(\frac{\pi}{4},1)} \qquad k=1:\boxed{(\frac{3\pi}{4},-1)}$$

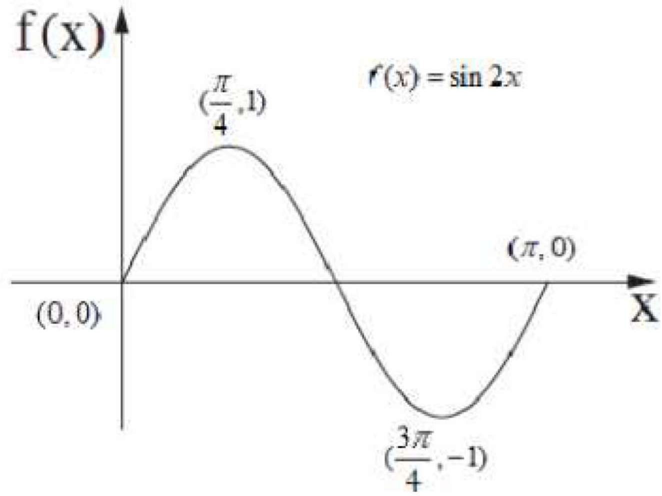
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה.

(סימני הנגזרת הוספו, כי לעיתים נדרש לצייר את גרף הנגזרת.)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)$	0		1		-1		0
$f'(x)$		+		-		+	
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(\pi,0)$ **מקסימום,** $(\frac{3\pi}{4},-1)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום,** $(0,0)$ **מינימום .**

(3) נסרטט את גרף הפונקציה $f(x)=\sin 2x$ **, המוגדרת בתחום** $0\le x\le \pi$**.**

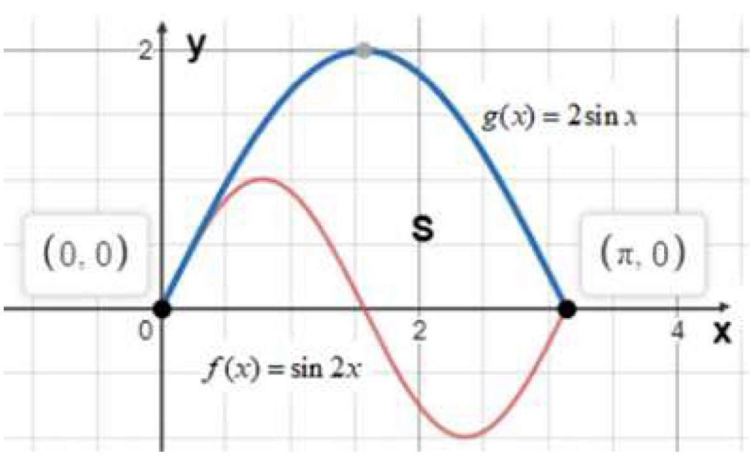


ב. נתונה הפונקציה $g(x)=2\sin x$ **, המוגדרת בתחום** $0\le x\le \pi$ **.**

$$\sin 2x=2\sin x$$
$$2\sin x\cos x-2\sin x=0$$
$$2\sin x(\cos x-1)=0$$
$$\sin x=0 \quad \cos x=1$$
$$x=\pi k \qquad\qquad x=2\pi k$$
$$k=0:\boxed{(0,0)} \qquad k=0:\boxed{(0,0)}$$
$$k=1:\boxed{(\pi,0)}$$

תשובה: $(0,0)$ **,** $(\pi,0)$**.**

ג. נחשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים .



$$S=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin 2x)\,dx$$
$$S=-2\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi}$$
$$x=\pi:\quad 2.5$$
$$x=0:\quad -1.5$$
$$S=2.5-(-1.5)$$
$$\boxed{S=4}$$

תשובה: גודל השטח הוא 4 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=9-(\ell n\,x)^2}$ **.**

(1) בתחום ההגדרה הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$ **.**

(2) בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=9-(\ell n\,x)^2$$
$$(\ell n\,x)^2=9$$
$$\ell n\,x=3 \quad \to x=e^3\approx 20.09 \quad \to \boxed{(e^3,0)}$$
$$\ell n\,x=-3 \quad \to x=e^{-3}=\frac{1}{e^3}\approx 0.05 \quad \to \boxed{(\frac{1}{e^3},0)}$$

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y **, כי בתחום ההגדרה** $x>0$ **.**

תשובה: $(e^3,0)$ **,** $(\frac{1}{e^3},0)$ **.**

(3) נמצא את שיעור נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$\boxed{f'(x)=-\frac{2\ell n\,x}{x}}$$
$$0=\ell n\,x$$
$$x=1 \quad \to y=9-(\ell n\,1)^2=9 \quad \to \boxed{(1,9)}$$
$$\left.\begin{array}{l} f'(0.5)=(-)\cdot\frac{(-)}{(+)}>0 \\ f'(2)=(-)\cdot\frac{(+)}{(+)}<0 \end{array}\right\}\max$$

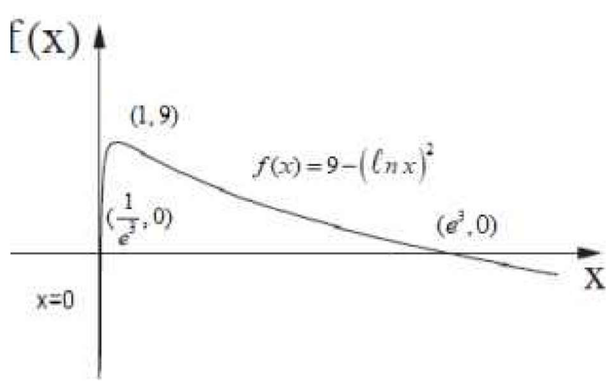
תשובה: $(1,9)$ **מקסימום.**

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=9-(\ell n\,x)^2$ **.**

שתי הצבות ליתר ביטחון, בתוך תחום ההגדרה, למציאת אסימפטוטות ולהתמצאות כללית .

כאשר $x\to+\infty$ **, למשל** $f(1000)=-38\to-\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

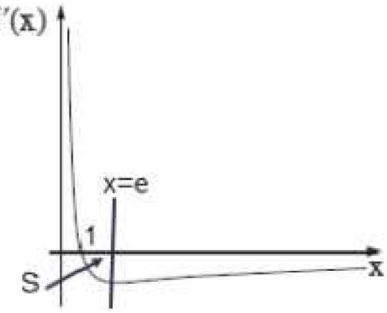
כאשר $x\to 0$ **, למשל** $f(0.001)=-76\to-\infty$ **, והישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**



ב. מובא סרטוט של גרף הנגזרת, $f'(x)$.

על פי סעיף א(3) הנגזרת מתאפסת כאשר $x=1$.

(הערה – אין מידע להבנה למה הישר $x=e$ עובר בנקודת הקיצון של הנגזרת, אולם אין לזה חשיבות.)



$$S=\int_1^e (0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_0^\pi$$

$$x=e:\quad -(9-(\ell n\, e)^2)=-8$$

$$x=1:\quad -9$$

$$S=-8-(-9)$$

$$\boxed{S=1}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא 1 יח"ר .

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$, כאשר M_0 - הכמות ההתחלתית

q הוא גורם הגידול, M_t הכמות לאחר זמן t.

א. ב- 4 שנים (מיום המדידה השני ועד חמש שנים מהמדידה הראשונה)

ירדה כמות החומר מ- $(\frac{1}{3})^2$ ק"ג ל- $(\frac{1}{3})^{10}$ ק"ג.

$$(\frac{1}{3})^{10} = (\frac{1}{3})^2 \cdot q^4 \quad / : (\frac{1}{3})^2$$

$$(\frac{1}{3})^8 = q^4$$

$$\sqrt[4]{(\frac{1}{3})^8} = q$$

$$(\frac{1}{3})^2 = q$$

$$\boxed{q = \frac{1}{9}}$$

כלומר, בשנה הראשונה החומר הגיע ל- $\frac{1}{9}$ מכמותו ביום המדידה הראשון,

ומכאן שהכמות ההתחלתית שלו הייתה 1 ק"ג $= (\frac{1}{3})^2 \cdot 9$.

או, $\boxed{M_0 = 1} \leftarrow \quad (\frac{1}{3})^2 = M_0 \cdot (\frac{1}{9})^1 \quad / : (\frac{1}{9})$

תשובה: קצב הדעיכה הוא פי $\frac{1}{9}$ לשנה (כל שנה החומר מאבד $\frac{8}{9}$ מכמותו, או קטן פי 9 .)

כמות החומר ההתחלתית הייתה 1 ק"ג.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=3^{-2x}$ **.**

נשים לב ש- $g(x)=3^{-2x}=(3^{-2})^x=(\frac{1}{9})^x$ **, ולכן** $g(x)$ **מתארת את כמות החומר לאחר יום המדידה הראשון.**

(1) בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $g(0)=(\frac{1}{9})^0=1 \quad \to \boxed{(0,1)}$ **.**

$g(x)=3^{-2x}$ **פונקציה חיובית, ולכן אין חיתוך עם ציר ה-** x **.**

תשובה: $(0,1)$**.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)=3^{-2x}$ **.**

$$g'(x)=3^{-2x}\cdot \ell n\,3\cdot(-2)$$

$$\boxed{g'(x)=(-2\ell n\,3)\cdot 3^{-2x}}$$

הנגזרת שלילית לכל x **, ולכן הפונקציה יורדת לכל** x **.**

תשובה: ירידה – כל x **, עלייה – אף** x**.**

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=3^{-2x}$**.**

הצבה אחת ליתר ביטחון, בתוך תחום ההגדרה, למציאת אסימפטוטות ולהתמצאות כללית .

כאשר $x\to+\infty$ **, למשל** $g(10)=2.8\cdot10^{-10}\to+0$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**