א. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = k \ , k \neq 4 \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \end{cases}$$

הסדרה b_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = 2a_n - 8$.

נוכיח כי הסדרה הנדסית, כאשר נראה כי המנה של $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ היא קבועה .

על פי הגדרת הסדרה b_n

$$b_{n+1} = 2a_{n+1} - 8$$
$$b_{n+1} = 2(3a_n - 8) - 8$$
$$b_{n+1} = 6a_n - 24$$

ועתה נראה כי המנה קבועה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{6a_n - 24}{2a_n - 8} = \frac{3(2a_n - 8)}{2a_n - 8} = 3$$

לכן המנה בין שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- n) והסדרה הנדסית.

הוכחנו.

מסקנות עבור הסעיף הבא: $q = 3$ **,** $b_1 = 2a_1 - 8 = 2k - 8$

תשובה: הוכח.

ב. נתון כי $b_5 = 324$

$$324 = b_1 q^4$$
$$324 = (2k - 8) \cdot 3^4$$
$$4 = 2k - 8$$
$$12 = 2k$$
$$\boxed{k = 6}$$

מסקנה עבור הסעיף הבא: $b_1 = 2 \cdot 6 - 8 = 4$

תשובה: $k = 6$

ג. נתון כי בסדרה b_n מתקיים $S_8 = 13{,}120$

$$13{,}120 = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1}$$
$$6{,}560 = 3^n - 1$$
$$6{,}561 = 3^n$$
$$\boxed{n = 8}$$

תשובה: $n = 8$ **.**

א. הישר $y=-x+4$ **, ששיפועו** -1**, משיק לפונקציה** $f(x)$ **, בנקודה שבה** $x=-1$ **, כלומר** $f'(-1)=-1$ **.**

נתון כי $f'(x)=a-e^{-x}$

$a-e^{-(-1)}=-1$

$a-e=-1$

$\boxed{a=e-1}$

תשובה: $a=e-1$ **.**

ב. נציב $a=e-1$ **ונקבל** $f'(x)=e-1-e^{-x}$ **.**

(1) נציב $x=-1$ **במשוואת המשיק,** $y=-x+4$ **, ונקבל את נקודת ההשקה:** $(-1,5) \leftarrow y=-(-1)+4=5$

תשובה: שיעור ה- y **של נקודת ההשקה הוא** 5 **.**

(2) נמצא את הפונקציה הקדומה, בהתבסס על פונקצית הנגזרת $f'(x)=e-1-e^{-x}$ **ונקודת ההשקה** $(-1,5)$ **.**

$f(x)=\int f'(x)dx$

$f(x)=\int e-1-e^{-x}dx$

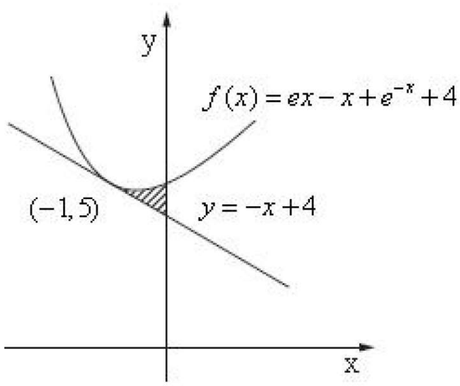
$f(x)=ex-x+e^{-x}+c$

$5=e\cdot(-1)-(-1)+e^{-(-1)}+c$

$5=-e+1+e+c$

$c=4$

$\boxed{f(x)=ex-x+e^{-x}+4}$



תשובה: $f(x)=ex-x+e^{-x}+4$

ב. נמצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=ex-x+e^{-x}+4$ **, המשיק, וציר ה-** y

הפרש פונקציות: $ex-x+e^{-x}+4-(-x+4)=ex-x+e^{-x}+4+x-4=e^{-x}+ex$

$$S=\int_{-1}^{0}(e^{-x}+ex)dx$$

$$S=-e^{-x}+\frac{ex^2}{2}\Big]_{-1}^{0}$$

$$S=(-e^{-0}+\frac{e\cdot 0^2}{2})-(-e^{-(-1)}+\frac{e\cdot(-1)^2}{2})$$

$$S=(-1)-(-e+0.5e)$$

$$\boxed{S=0.5e-1=0.359}$$

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא $0.5e-1=0.359$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x}{\ell n(2x)}$

על פי הגדרת פונקצית ה- ℓn **נקבל** $2x>0$ **ולכן** $x>0$.

הפונקציה אינה מוגדרת כאשר המכנה מתאפס: $\ell n(2x)\neq 0 \leftarrow 2x\neq e^0=1 \leftarrow x\neq 0.5$.

תשובה: $x>0\ ,\ x\neq 0.5$

ב. נמצא את שיעור נקודת הקיצון ואת סוגה.

$$f'(x)=\frac{2\ell n(2x)-2x\cdot\dfrac{2}{2x}}{\ell n^2(2x)}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n(2x)-2}{\ell n^2(2x)}}$$

$$0=2\ell n(2x)-2 \quad \to \ell n(2x)=1 \quad \to 2x=e$$

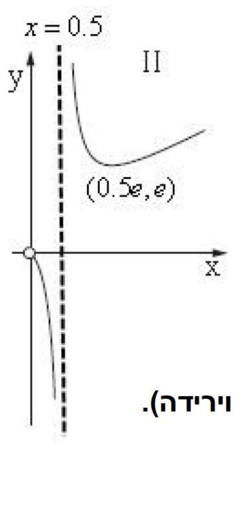
$$x=0.5e \quad \to y=\frac{2\cdot 0.5e}{\ell n(2\cdot 0.5e)}=e \quad \to (0.5e,e)$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(0.3)=2\ell n(2\cdot 0.3)-2=-3.022<0,\quad f'(1)=2\ell n(2\cdot 1)-2=-0.613<0$$

$$f'(2)=2\ell n(2\cdot 2)-2=0.77>0$$

x	2	$0.5e=1.359$	1	0.5		0
y'	+	0	-		-	
מסקנה	↗	Min	↘		↘	



תשובה: $(0.5e,e)$ **מינימום**

ג. תחומי עלייה: $x>0.5e$ **, תחומי ירידה:** $0.5<x<0.5e$ **או** $0<x<0.5$.

ד. על פי סעיפים א-ג, הסקיצה המתאימה היא של גרף II.

הוספנו לציור אסימפטוטה אנכית $x=0.5$.

נקודת המינימום $(0.5e,e)$ **מתאימה,**

וגם תחומי העלייה והירידה מתאימים.

ה. ניתן לראות שעבור $x>\dfrac{e}{2}$ **הפונקציה עולה (הן על פי הגרף והן על פי טבלת עלייה וירידה).**

לכן ערכיה גדולים מ- e**, שהוא שיעור ה-** y **של נקודת המינימום.**

תשובה: הוכח.

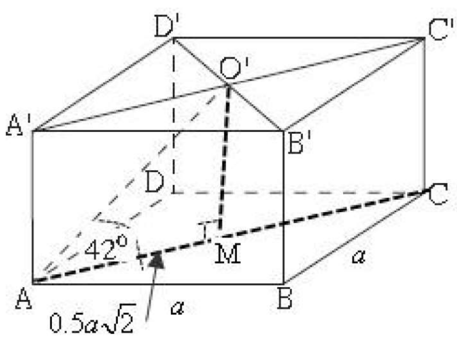
א. נסמן באות M **את מפגש אלכסוני הבסיס התחתון ובהתאם** $\measuredangle O'AM = 42°$.

זאת הזווית שבין AO' **לבסיס, כי** $O'M$ **הוא האנך מהמשופע** AO' **לבסיס** $(ABCD)$,

כאשר AM **הוא ההיטל של המשופע לבסיס.**

אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה וזוויות הריבוע ישרות,

לכן אורך אלכסון הבסיס, על פי משפט פיתגורס הוא $a\sqrt{2}$, **ומכאן ש-** $AM = 0.5a\sqrt{2}$.



$\underline{\Delta AO'M}$

$$\tan \measuredangle O'AM = \frac{O'M}{AM}$$

$$\tan 42° = \frac{O'M}{0.5a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{O'M = 0.6367a}$$

נפח התיבה שווה למכפלת שטח הבסיס (a^2)

בגובה התיבה $(O'M = 0.6367a)$, **כלומר** $0.6367a^3$

תשובה: נפח התיבה הוא $0.6367a^3$.

ב. **הזווית שבין אלכסון התיבה** (AC') **לבסיס** $(ABCD)$ **היא** $\measuredangle C'AB$.

כי $C'C$ **הוא האנך מהמשופע** AC' **לבסיס, כאשר** AC **הוא ההיטל של המשופע לבסיס**.

$\underline{\Delta C'AC}$

$$\tan \measuredangle C'AC = \frac{C'C}{AC}$$

$$\tan \measuredangle C'AC = \frac{0.6367a}{a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\measuredangle C'AC = 24.24°}$$

תשובה: הזווית בין אלכסון התיבה לבסיס היא בת $24.24°$.