

תחילה נמצא את גורם הדעיכה.

במשך 4 שנים ירדה כמות החומר הרדיואקטיבי מ- 250 גרם ל- 200 גרם.

$$200 = 250 \cdot q^4 \quad /: 250$$

$$0.8 = q^4$$

$$q = \sqrt[4]{0.8}$$

$$\boxed{q = 0.9457}$$

נחשב כמה שנים עברו מהרגע שכמות החומר הרדיואקטיבי הייתה 1000 גרם,

עד שנותרה כמו של 250 גרם.

$$250 = 1000 \cdot 0.9457^t \quad /: 1000$$

$$0.25 = 0.9457^t$$

$$\ln 0.25 = \ln 0.9457^t$$

$$\ln 0.25 = t \ln 0.9457$$

$$t = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.9457}$$

$$\boxed{t = 24.85}$$

תשובה כעבור 24.85 שנים .

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x$ .

בנקודה שבה  $x = 0$  העבירו משיק. נמצא את משוואת המשיק.

שיעורי נקודת ההשקה. ולכן  $f(0) = \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0} - e^0 - 2 \cdot 0 = -0.5$

ולכן  $f'(0) = e^{2 \cdot 0} - e^0 - 2 = -2$ ,  $f'(x) = e^{2x} - e^x - 2$  הוא שיפוע המשיק.

$$y - (-0.5) = -2(x - 0)$$

$$\boxed{y = -2x - 0.5}$$

תשובה: משוואת המשיק היא  $y = -2x - 0.5$ .

ב. נמצא את שיעור ה- $x$  של נקודת המינימום, בה מתקיים  $f'(x) = 0$ .

$$0 = e^{2x} - e^x - 2$$

$$(e^x)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

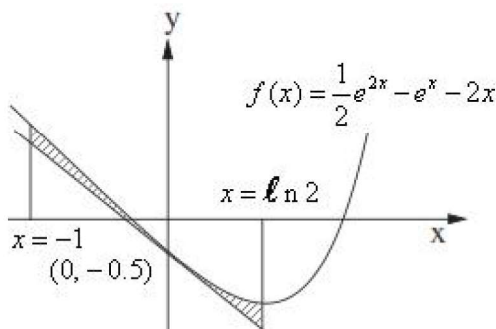
$$e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$$

$$\cancel{e^x = -1} \leftarrow e^x > 0$$

תשובה:  $x = \ln 2$ .

ג. נמצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x$ , המשיק, והישרים  $x = -1$  ו- $x = \ln 2$ .

הפרש פונקציות:  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x - (-2x - 0.5) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x + 2x + 0.5 = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 0.5$



$$S = \int_{-1}^{\ln 2} \left( \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 0.5 \right) dx$$

$$S = \left[ \frac{e^{2x}}{4} - e^x + 0.5x \right]_{-1}^{\ln 2}$$

$$S = \left( \frac{e^{2 \cdot \ln 2}}{4} - e^{\ln 2} + 0.5 \cdot \ln 2 \right) - \left( \frac{e^{2 \cdot (-1)}}{4} - e^{-1} + 0.5 \cdot (-1) \right)$$

$$S = (-0.6534) - (-0.834)$$

$$\boxed{S = 0.181}$$

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא 0.181 יח"ר.

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a \ln x}{x^2}$ , פרמטר שונה מאפס.

על פי הגדרת פונקציה ה- $\ln$  נקבל  $x > 0$  ולכן  $x > 0$ .

הפונקציה אינה מוגדרת כאשר המכנה מתאפס:  $x \neq 0$ .

תשובה:  $x > 0$ .

ב. נתון כי שיפוע המשיק בנקודה שבה  $f(x) = 0$  הוא 3.

נמצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

$$0 = \frac{a \ln x}{x^2}$$

$$0 = \ln x$$

$$x = 1$$

בהתאם,  $f'(1) = 3$

$$f'(x) = a \cdot \frac{\frac{x^2}{x^2} - 2x \ln x}{x^4}$$

$$3 = a \cdot \frac{1 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1}{1^4}$$

$$\boxed{a = 3}$$

תשובה:  $a = 3$ , ובהתאם:  $f(x) = \frac{3 \ln x}{x^2}$

ג. נמצא את שיעור נקודת הקיצון ואת סוגה.

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{\frac{x^2}{x^2} - 2x \ln x}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x) = 3 \cdot \frac{x - 2x \ln x}{x^4}}$$

$$0 = x - 2x \ln x \quad /: x > 0$$

$$0 = 1 - 2 \ln x$$

$$\ln x = 0.5$$

$$x = \sqrt{e} \rightarrow y = \frac{3 \ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}^2} = \frac{3 \cdot 0.5}{e} = \frac{3}{2e} \rightarrow \left( \sqrt{e}, \frac{3}{2e} \right)$$

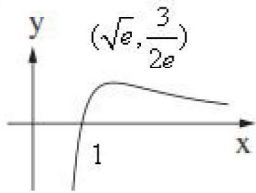
נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי).

$$f'(1.6) = + \cdot \frac{1.6 - 2 \cdot 1.6 \cdot \ln 1.6}{+} = 0.096 > 0, \quad f'(1.7) = + \cdot \frac{1.7 - 2 \cdot 1.7 \cdot \ln 1.7}{+} = -0.104 < 0$$

0	1.6	$\sqrt{e} = 1.648$	1.7	$x$
	+	0	-	$y'$
	↗	Max	↘	מסקנה

תשובה:  $(\sqrt{e}, \frac{3}{2e})$  מקסימום.

II



ד. על פי סעיפים א-ג, הסקיצה המתאימה היא של גרף II.

הגרף מתאים לתחום ההגדרה, נקודת המקסימום  $(\sqrt{e}, \frac{3}{2e})$  מתאימה,

וגם נמצאה רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- $x$  ב- $x=1$ .

ה. הערך המקסימלי של הפונקציה הוא  $\frac{3}{2e} = 0.5518$ , ולכן אין פתרון למשוואה  $\frac{3 \ln x}{x^2} = 1$ .

תשובה: אין פתרון.

- א. בסיס הפירמידה EABCD הוא מלבן. כיוון שהאלכסונים במלבן חוצים זה את זה, הרי ש-  $\Delta OAB$  שווה שוקיים. הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה היא  $\angle EBO$ , שהיא הזווית שבין המקצוע צדדי EB להיטל שלו על הבסיס OB.

$$\frac{\Delta EBO}{\Delta EBO}$$

$$\tan \angle EBO = \frac{EO}{BO}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{10}{BO}$$

$$\boxed{BO = 17.32}$$

- משולש BCO הוא שווה שוקיים. זווית הראש היא בת  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ . מכאן שהמשולש שווה צלעות. תשובה: אורך המקצוע BC הוא 17.32 ס"מ.

- ב. נוריד גובה OZ לבסיס BC ולכן הוא גם תיכון וחוצה זווית הראש.

$$BZ = \frac{BC}{2} = \frac{17.32}{2} = 8.66 \text{ ס"מ}$$

על פי משפט פיתגורס, ב-  $\Delta BOZ$ :

$$17.32^2 = (OZ)^2 + 8.66^2$$

$$225 = (OZ)^2$$

$$OZ = 15 \text{ ס"מ}$$

כיוון ש- Z אמצע המקצוע BC,

הרי ש- EZ הוא תיכון בפאה EBC שוות השוקיים

(המקצועות הצדדיים שווים זה לזה),

ולכן EZ הוא הגובה ל- BC בפאה EBC.

$$\frac{\Delta EOZ}{\Delta EOZ}$$

$$\tan \angle EZO = \frac{EO}{OZ}$$

$$\tan \angle EZO = \frac{10}{15}$$

$$\boxed{\angle EZO = 33.69^\circ}$$

- תשובה: הזווית שבין הגובה ל- BC בפאה EBC היא בת  $33.69^\circ$ .

