א. נתונה הסדרה החשבונית $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,...\,,a_n$ **.**

$\boxed{a_1=2.5}$ **.**

האיבר במקום ה- 33 **גדול ב-** 80 **מהאיבר במקום ה-** 17 **ולכן:**

$$a_{33}=a_{17}+80$$
$$a_1+32d=a_1+16d+80$$
$$16d=80$$
$$\boxed{d=5}$$

מהסדרה הנתונה לקחו כל איבר שלישי, כך שהתקבלה סדרה חשבונית חדשה:

$a_3\,,\,a_6\,,\,a_9\,,\,...\,,a_n$ **. כיוון ששתי הסדרו מסיימות באותו איבר,**

הרי שמספר האיברים בסדרה המקורית מתחלק ב- 3 **ללא שארית.**

בכל מקרה, נראה שהסדרה החדשה היא חשבונית (למרות שזה כבר נתון), ונמצא את ההפרש הקבוע

$a_{k+3}-a_k=a_k+3d-a_k=3d=3\cdot 5=15$ **, כלומר הפרש קבוע, אינו תלוי ב-** k **, ולכן הסדרה חשבונית.**

כיוון, שנתון כי זו סדרה חשבונית – ניתן גם $a_6-a_3=a_3+3d-a_3=3d=3\cdot 5=15$ **.**

תשובה: הפרש הסדרה החדשה הוא 15 **.**

ב. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3100 **.**

(1) נסמן ב- t **את מספר איברי הסדרה, כאשר** $t=\frac{n}{3}$ **, ו-** $a_3=a_1+2d=2.5+2\cdot 5=12.5$

$$S_n=\frac{n(2a_1+d(n-1))}{2}$$
$$3100=\frac{t(2\cdot 12.5+15(t-1))}{2}$$
$$6200=t(25+15t-15)$$
$$6200=t(15t+10)$$
$$0=15t^2+10t-6200$$
$$t_{1,2}=\frac{-10\pm 610}{30}$$
$$\boxed{t=20}\quad \leftarrow t>0$$

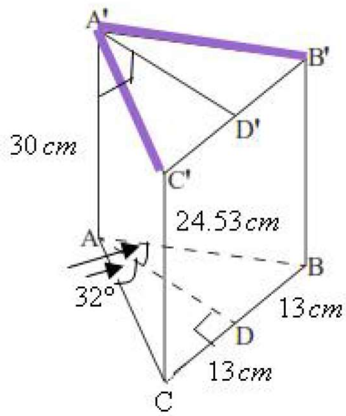
תשובה: בסדרה החדשה 20 **איברים.**

(2) בסדרה המקורית פי שלושה איברים, לכן יש בה 60 **איברים.**

תשובה: בסדרה המקורית 60 **איברים.**

א. כיוון שבסיס המנסרה הוא משולש שווה שוקיים, $AC = AB$ **,**

הרי ש- AD **, הגובה לבסיס, הוא גם תיכון לבסיס וגם חוצה זווית הראש.**



$$CD = BD = \frac{26}{2} = 13\,cm$$

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$$

$\underline{ACD}$

$$\tan 32^\circ = \frac{CD}{AD}$$

$$AD = \frac{13}{\tan 32^\circ}$$

$$\boxed{AD = 20.80\,cm}$$

שטח הבסיס: $S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{26 \cdot 20.80}{2} = 270.46\,cm^2$ **.**

נתון כי נפח המנסרה שווה 8112 **סמ"ק.**

$$8112 = 270.46 \cdot H \quad \rightarrow H = 29.99 \approx 30\,cm$$

תשובה: גובה המנסרה הוא 30 **ס"מ.**

ב. הזווית בין $A'B$ **למישור הבסיס** ABC, **היא** $\sphericalangle A'BA$ **שבין** $A'B$ **(המשופע) לבין ההיטל שלו לבסיס** ABC,

ומתקבלת במשולש ישר הזווית $A'AB$ $(\sphericalangle A'AB = 90^\circ)$**.**

$\underline{A'AB}$

$$\tan \sphericalangle A'BA = \frac{AA'}{AB}$$

$$\tan \sphericalangle A'BA = \frac{30}{24.53}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'CA = 50.73^\circ}$$

$\underline{ABD}$

$$\sin 32^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$AB = \frac{13}{\sin 32^\circ}$$

$$\boxed{AB = 24.53\,cm}$$

תשובה: הזווית בין $A'B$ **למישור הבסיס** ABC **היא בת** 50.73° **.**

ב. הזווית $A'AD'$ **מתקבלת במשולש ישר הזווית** $AA'D'$ $(\sphericalangle AA'D' = 90^\circ)$**.**

$\underline{AA'D'}$

$$\tan \sphericalangle A'AD' = \frac{A'D'}{AA'}$$

$$\tan \sphericalangle A'AD' = \frac{20.80}{30}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'AD' = 34.73^\circ}$$

תשובה: הזווית $A'AD'$ **היא בת** 34.73° **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=0.5x-0.5\cos(2x)+0.5$ והישר $y=0.5x$.

(1) נמצא את שיעורי ה- x של הנקודות המשותפות שלהם בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

$$0.5x=0.5x-0.5\cos(2x)+0.5$$
$$0.5\cos 2x=0.5$$
$$\cos 2x=1$$
$$2x=2\pi k$$
$$x=\pi k$$

עבור $k=0,1,-1$ **נקבל** $x=0,\pi,-\pi$

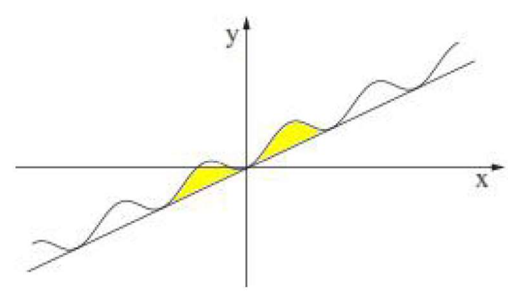
תשובה: $x=0,\pi,-\pi$.

(2) נמצא האם הנגזרות שוות בנקודות אלו, כלומר שיפוע הפונקציה שווה לשיפוע הישר שהוא 0.5 .

$$\boxed{f'(x)=0.5+\sin 2x}$$
$$f'(0)=0.5+\sin(2\cdot 0)=0.5 \quad o.k.$$
$$f'(\pi)=0.5+\sin(2\cdot\pi)=0.5 \quad o.k.$$
$$f'(-\pi)=0.5+\sin(2\cdot(-\pi))=0.5 \quad o.k.$$

תשובה: הישר משיק לפונקציה בנקודות אלו.

ב. בכל התחום $-\pi\le x\le\pi$ גרף הפונקציה אינו מתחת למשיק:



נחשב את גודל השטח (הצהוב).

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(0.5x-0.5\cos(2x)+0.5-0.5x)\,dx$$
$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(-0.5\cos(2x)+0.5)\,dx$$
$$S=\left(-\frac{\sin 2x}{4}+0.5x\right)\Big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$S=\left(-\frac{\sin 2\pi}{4}+0.5\pi\right)-\left(-\frac{\sin(2(-\pi))}{4}+0.5(-\pi)\right)$$
$$S=0.5\pi+0.5\pi$$
$$\boxed{S=\pi}$$

תשובה: גודל השטח הוא π .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^2e^{-\frac{x^2}{m}}$ **(** m **פרמטר שונה מ-** 0 **)**

תשובה: הפונקציה מוגדרת לכל x **.**

ב. לפונקציה נקודת קיצון ב- $x=-2$ **, לכן בנקודה זו הנגזרת מתאפסת.**

$$f'(x)=4xe^{-\frac{x^2}{m}}+2x^2e^{-\frac{x^2}{m}}(-\frac{2x}{m})=\underbrace{2e^{-\frac{x^2}{m}}}_{>0}(2x-x^2\cdot\frac{2x}{m})$$

$$0=2\cdot(-2)-(-2)^2\cdot\frac{2\cdot(-2)}{m}$$

$$0=-4+\frac{16}{m}\quad\rightarrow 0=-4m+16\quad\rightarrow \boxed{m=4}$$

תשובה: $m=4$ **.**

נציב $m=4$ **ולכן** $f(x)=2x^2e^{-\frac{x^2}{4}}$ **(ניתן לראות שזו פונקציה זוגית** $f(-x)=f(x)$ **ואי-שלילית).**

ג. (1) בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ומתקבל** $2x^2=0$ **ובהתאם** $(0,0)$

זו כמובן גם נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **.**

תשובה: $(0,0)$ **.**

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן :

$$f'(x)=4xe^{-\frac{x^2}{4}}+2x^2e^{-\frac{x^2}{4}}(-\frac{2x}{4})$$

$$\boxed{f'(x)=\underbrace{2e^{-\frac{x^2}{4}}}_{>0}(2x-0.5x^3)}$$

$$0=x(2-0.5x^2)\quad\rightarrow x=0\quad\rightarrow(0,0)$$

$$2-0.5x^2=0\quad\rightarrow x^2=4\quad\rightarrow x=\pm2$$

$$x=2\quad\rightarrow f(2)=2\cdot2^2e^{-\frac{2^2}{4}}\quad\rightarrow\boxed{(2,\frac{8}{e})}\quad\rightarrow\boxed{(-2,\frac{8}{e})}$$

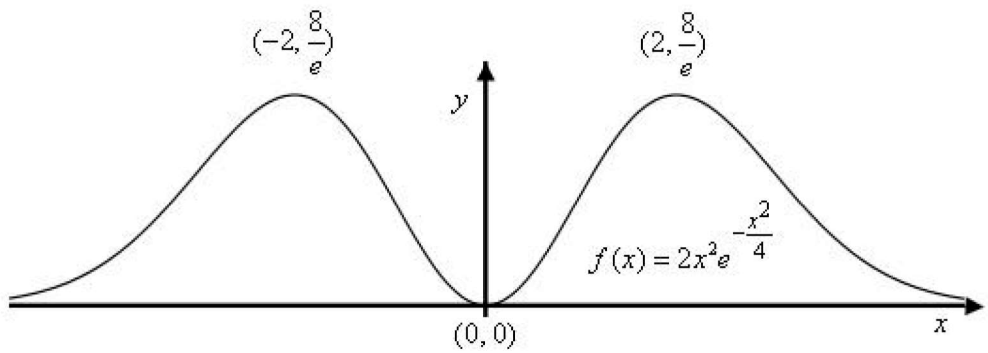
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה ($\underbrace{2e^{-\frac{x^2}{m}}}_{>0}$ **חיובי)**

$$f'(-3)=2\cdot(-3)-0.5(-3)^3>0,\quad f'(-1)<0,\quad f'(1)>0,\quad f'(3)<0$$

	-2		0		2		x
+	0	**-**	0		0	**-**	y'
↗	**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**	↘	**מסקנה**

תשובה: $(2,\frac{8}{e})$ **,** $(-2,\frac{8}{e})$ **מקסימום ,** $(0,0)$ **מינימום.**

(3) הסקיצה המתאימה

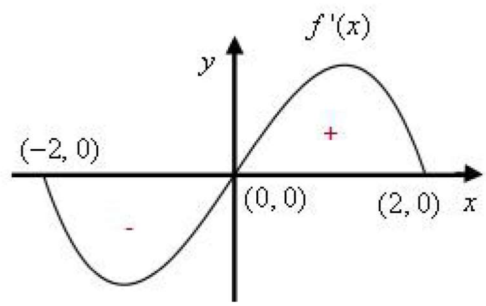


ד. על פי טבלת עלייה/ ירידה, או הגרף של $f(x)$, ניתן לראות ש- $f'(x) > 0$ עבור $0 < x < 2$ או $x < 0$,

ו- - $f'(x) < 0$ עבור $x > 2$ או $-2 < x < 0$.

התחום המבוקש הוא $-2 \le x \le 2$, כאשר בקצוות $f'(x) = 0$.

בהנחה, שלפונקציית הנגזרת אין יותר משתי נקודות קיצון פנימיות, להלן סקיצה אפשרית:



נתונה הפונקציה $f(x)=-x\ell n(2x)$.

שטח המלבן שווה למכפלת האורך ברוחב, כלומר $\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}$.

C **היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-** x **, לכן** $f(x)=0$

$$0=-x\ell n(2x)$$
$$x=0 \quad \to x_{\mathrm{O}}=0$$
$$\ell n(2x)=0 \quad \to 2x=e^{0}=1 \quad \to x_{\mathrm{C}}=0.5$$

ובהתאם: $\mathrm{OC}=0.5-0=0.5$.

הצלע AB **משיקה לפונקציה בנקודת המקסימום שלה,**

שעל פי הציור עבור $0<x<0.5$ **.**

$$f'(x)=-\ell n(2x)-x\cdot\frac{2}{2x}$$
$$\boxed{f'(x)=-\ell n(2x)-1}$$
$$0=-\ell n(2x)-1$$
$$\ell n(2x)=-1$$
$$2x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$
$$x=\frac{1}{2e} \quad \to f(\frac{1}{2e})=-\frac{1}{2e}\cdot\ell n(2\cdot\frac{1}{2e})=\frac{1}{2e}$$

ולכן משוואת הצלע AB **היא** $y=\frac{1}{2e}$ **, ו-** $\mathrm{OA}=\frac{1}{2e}-0=\frac{1}{2e}$

נחשב את השטח: $\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}=0.5\cdot\frac{1}{2e}=\frac{1}{4e}$

תשובה: שטח המלבן הוא $\frac{1}{4e}$.

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t **.**

בעוד 10 **שנים תרד הכמות ב-** 20% **מהכמות שיש לחוקר כיום, כלומר תגיע ל-** 80% **מהכמות כיום.**

כלומר הכמות תרד מ- M_0 **ל-** $0.6M_0$ **ב-** 10 **שנים.**

$$0.8M_0 = M_0 \cdot q^{10} \quad / : M_0$$
$$0.8 = q^{10}$$
$$q = \sqrt[10]{0.8}$$
$$\boxed{q = 0.9779}$$

נמצא כעבור כמה שנים , החל מהיום, תרד הכמות ב- 40% **מהכמות שיש לחוקר כיום,**

כלומר תגיע ל- 60% **מהכמות כיום.**

$$0.6M_0 = M_0 \cdot 0.9779^t \quad / : M_0$$
$$0.6 = 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = \ell n\, 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = t \ell n\, 0.9779$$
$$\frac{\ell n\, 0.6}{\ell n\, 0.9779} = t$$
$$\boxed{t = 22.89}$$

תשובה בעוד 22.89 **שנים .**