א. הסדרה החשבונית $3\,,5\,,7\,,...\,,a_n$ מתארת את מספר הגולות שראובן הכניס למשחק בכל תור,

כי ראובן הכניס 3 גולות בתור הראשון ובכל תור 2 גולות נוספות.

לכן $\boxed{a_1=3}$, $\boxed{d=2}$.

בתור האחרון, התור ה- n-י, הכניס ראובן למשחק $2n+1$ גולות $=a_n=3+2(n-1)$.

בהתאם מספר הגולות שקיבל, לאור נצחונו, הוא $6(2n+1)=12n+6$.

תשובה: ראובן קיבל בתור האחרון $12n+6$ גולות.

ב. (1) נמצא את מספר הגולות שראובן הכניס למשחק ב- n התורים ששיחק.

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
$$S_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}$$
$$S_n=\frac{n(2n+4)}{2}$$
$$S_n=n(n+2)$$
$$S_n=n^2+2n$$

תשובה: מספר הגולות שראובן הכניס למשחק ב- n התורים ששיחק הוא n^2+2n .

(2) בתור האחרון קיבל ראובן מספר גולות הגדול ב- 6 ממספר כל הגולות שהכניס למשחק.

המשוואה המתאימה היא : $n^2+2n+6=12n+6$

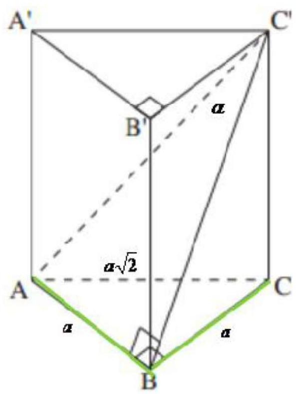
$$n^2+2n+6=12n+6$$
$$n^2-10n=0$$
$$n(10-n)=0$$
$$\boxed{n=10} \quad \leftarrow n>0$$

תשובה: ראובן שיחק 10 תורים .

א. בסיס המנסרה הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים, $AC = BC = a$ **.**

$\sphericalangle ABC' = 90°$ **(נתון, וגם ברור כי** AB **מאונך לפאה** $BCC'B'$ **כי המנסרה ישרה וכי** $AB \perp BC$ **).**

$\sphericalangle AC'B = \alpha$ **כי** BC **הוא ההיטל לפאה** $BCC'B'$ **של האלכסון** AC' **, ולכן זו הזווית בינו למישור הפאה.**



משפט פיתגורס ΔABC

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 2a^2$$

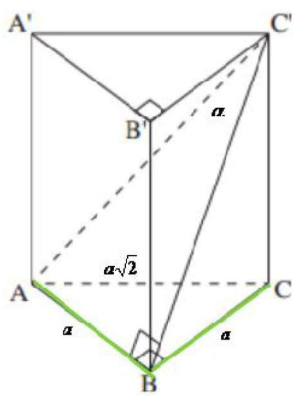
$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$

$\underline{ACC'}$

$$\tan\alpha = \frac{AB}{BC'}$$

$$\boxed{BC = \frac{a}{\tan\alpha}}$$

משפט פיתגורס $\Delta BCC'$



$$(BC)^2 = (BC)^2 + (CC')^2$$

$$(\frac{a}{\tan\alpha})^2 = a^2 + (CC')^2 \quad \rightarrow \frac{a^2}{\tan^2\alpha} - a^2 = (CC')^2$$

$$a^2(\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}) = (CC')^2 \quad \rightarrow \boxed{CC' = \frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{1-\tan^2\alpha}}$$

שטח הבסיס: $S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$ **.**

נפח המנסרה: $V = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{1-\tan^2\alpha} = \frac{a^3}{2\tan\alpha}\sqrt{1-\tan^2\alpha}$

תשובה: נפח המנסרה הוא $\frac{a^3}{2\tan\alpha}\sqrt{1-\tan^2\alpha}$ **.**

ב. נתון כי גובה המנסרה הוא $2a$

$$2a = \frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{1-\tan^2\alpha} \quad / : a > 0$$

$$2\tan\alpha = \sqrt{1-\tan^2\alpha}$$

$$4\tan^2\alpha = 1 - \tan^2\alpha$$

$$5\tan^2\alpha = 1$$

$$\tan^2\alpha = 0.2 \quad \rightarrow \tan\alpha = \underset{\uparrow}{+}\sqrt{0.2} \quad \rightarrow 2 \cdot 0.2 = \sqrt{1-0.2^2} \quad \rightarrow 0.4 = 0.4 \quad o.k.$$

$$\boxed{\alpha = 24.09°} \quad \leftarrow 0 < \alpha < 45°$$

תשובה: $\alpha = 24.09°$ **.**

ג. $\sphericalangle C'AC = \beta$ **כי** AC **הוא ההיטל למישור** ABC **של האלכסון** AC' **, ולכן זו הזווית בינו למישור הבסיס.**

$\underline{ACC'}$

$$\tan\beta = \frac{CC'}{AC}$$

$$\tan\beta = \frac{2a}{a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\beta = 54.74^\circ} \quad 0 < \beta < 90^\circ$$

תשובה: גודל הזווית שבין האלכסון AC' **לבסיס** ABC **הוא** 54.74° **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a-b\sin(2x)$ **בתחום** $0\le x\le \pi$.

נציב את שיעורי אחת מנקודות החיתוך עם ציר ה- x **, את** $(\frac{\pi}{12},0)$ **בתבנית הפונקציה.**

$$0=a-b\sin(2\cdot\frac{\pi}{12})$$
$$0=a-b\cdot\frac{1}{2}$$
$$\boxed{b=2a}$$

תשובה: $b=2a$.

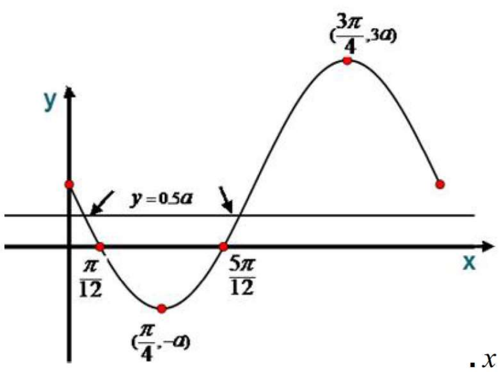
ב. נציב $b=2a$ **בפונקציה:** $f(x)=a-2a\sin(2x)$.

(1) בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,a)$.

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$0=a-2a\sin 2x \quad /:a>0$$
$$0=1-2\sin 2x$$
$$\sin 2x=0.5=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \qquad 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{12}+\pi k \qquad x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$$

ג. הסקיצה



ושני הפתרונות היחידים בתחום $0\le x\le\pi$ **הם** $x=\frac{\pi}{12}, \quad x=\frac{5\pi}{12}$.

תשובה: $(0,a)$, $(\frac{\pi}{12},0)$, $(\frac{5\pi}{12},0)$.

(2) נקודות הקצה של הפונקציה בתחום $0\le x\le\pi$ **הן** $(0,a)$, (π,a)**, כאשר**

$$\boxed{f'(x)=-4a\cos 2x}$$
$$0=\cos 2x$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

ושני הפתרונות היחידים בתחום $0\le x\le\pi$ **הם** $x=\frac{3\pi}{4}, \quad x=\frac{\pi}{4}$**, והנקודות המתאימות** $(\frac{\pi}{4},-a)$ **,** $(\frac{3\pi}{4},3a)$**. על פי ערכי הפונקציה בקצוות ובנקודות החשודות כקיצון אלו גם נקודות הקיצון המוחלט.**

תשובה: $(\frac{\pi}{4},-a)$ **מינימום מוחלט ,** $(\frac{3\pi}{4},3a)$ **מקסימום מוחלט.**

ג. הסקיצה משמאל, במרכז העמוד.

ד. למשוואה $f(x)=0.5a$ **יש שני פתרונות, מסומנים בחיצים בסקיצה, כנקודות החיתוך של** $f(x)$ **עם** $y=0.5a$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(3e^x-3)^2$ **(פונקציה אי שלילית)**

שתי הצבות במחשבון ומסקנות: $f(-10)=8.999\to+9,\quad f(10)=4366090291\to+\infty$ **,**

לכן $y=9$ **אסימפטוטה אופקית עבור** $x\to-\infty$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(3e^x-3)^2$ **(פונקציה אי שלילית)**

שתי הצבות במחשבון ומסקנות: $f(-10)=8.999\to+9,\quad f(10)=4366090291\to+\infty$ **,**

לכן $y=9$ **אסימפטוטה אופקית עבור** $x\to-\infty$ **.**

(1) תשובה: הפונקציה מוגדרת לכל x**.**

(2) בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,0)$**.**

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$**.**

$$0=(3e^x-3)^2$$
$$0=3e^x-3$$
$$e^x=1\quad\to x=0\quad\to(0,0)$$

תשובה: $(0,0)$ **(מינימום - הפונקציה אי-שלילית ולכן** 0 **הערך המינימלי).**

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון.

$$f'(x)=3(3e^x-3)\cdot 3e^x$$
$$\boxed{f'(x)=9e^x(3e^x-3)}$$
$$0=3e^x-3$$
$$e^x=1\quad\to x=0\quad\to(0,0)$$

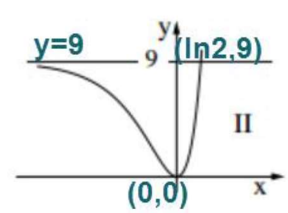
תשובה: $(0,0)$ **מינימום (הפונקציה אי-שלילית ולכן** 0 **הערך המינימלי).**

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הישר $y=9$ **.**

$$9=(3e^x-3)^2$$
$$3=3e^x-3\qquad -3=3e^x-3$$
$$e^x=2\qquad e^x=0\to\varnothing$$
$$x=\ell n\,2\quad\to(\ell n\,2,9)$$

תשובה: $(\ell n\,2,9)$**.**

ג. הגרף המתאים הוא גרף II **.**



נימוקים: (1) $(0,0)$ **נקודת המינימום. (2) חיתוך עם הישר** $y=9$ **עבור** $x=\ln 2>0$ **,**

(3) אסימפטוטה אופקית $y=9$

תשובה: הגרף המתאים הוא גרף II**.**

5א

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{-2}{2x-3}$.

יש לוודא שהמכנה אינו מתאפס: $2x-3\neq 0$ **ולכן** $x\neq 1.5$.

תחום ההגדרה: $x\neq 1.5$

ב. ארבע הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה)

$f(100)=-0.01\to +0,\quad f(-100)=9.8\cdot 10^{-3}\to +0$ **, מסקנה:** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

$f(1.5001)=-10,000\to -\infty,\quad f(1.499)=1000\to +\infty$ **, מסקנה:** $x=1.5$ **אסימפטוטה אנכית.**

נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{+2\cdot 2}{(2x-3)^2}>0$$

תשובה: עלייה: $x>1.5$ **או** $x<1.5$ **, ירידה: אף** x .

ג. הוסבר כבר בתחילת הסעיף הקודם .

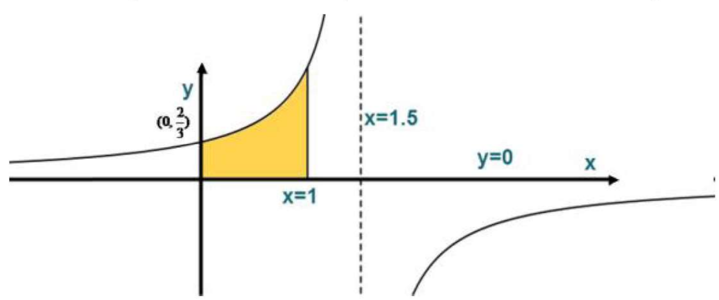
תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית,** $x=1.5$ **אסימפטוטה אנכית.**

ד. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **והנקודה היא** $(0,\dfrac{2}{3})$.

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x **, כי מונה הפונקציה אינו מתאפס.**

תשובה: $(0,\dfrac{2}{3})$

ה. הסקיצה המתאימה, כולל סימון השטח עבור סעיף ו.



ו. נחשב את השטח, הצבוע בצהוב.

$$S=\int_0^1\left(\frac{-2}{2x-3}\right)dx$$

$$S=\frac{-2\ell n|2x-3|}{2}\Big]_0^1$$

$$S=(-\ell n|2\cdot 1-3|)-(-\ell n|2\cdot 0-3|)$$

$$S=(-0)-(-\ell n 3)$$

$$\boxed{S=\ell n 3}$$

תשובה: השטח המבוקש הוא $\ell n 3$.

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t **.**

בעוד 10 **שנים תרד הכמות ב-** 20% **מהכמות שיש לחוקר כיום, כלומר תגיע ל-** 80% **מהכמות כיום.**

כלומר הכמות תרד מ- M_0 **ל-** $0.6M_0$ **ב-** 10 **שנים.**

$$0.8M_0 = M_0 \cdot q^{10} \quad / : M_0$$
$$0.8 = q^{10}$$
$$q = \sqrt[10]{0.8}$$
$$\boxed{q = 0.9779}$$

נמצא כעבור כמה שנים , החל מהיום, תרד הכמות ב- 40% **מהכמות שיש לחוקר כיום,**

כלומר תגיע ל- 60% **מהכמות כיום.**

$$0.6M_0 = M_0 \cdot 0.9779^t \quad / : M_0$$
$$0.6 = 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = \ell n\, 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = t \ell n\, 0.9779$$
$$\frac{\ell n\, 0.6}{\ell n\, 0.9779} = t$$
$$\boxed{t = 22.89}$$

תשובה בעוד 22.89 **שנים .**