א. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 9 \end{cases}$$

הסדרה b_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = a_n + 3$.

איברי הסדרה a_n חיוביים החל מהאיבר השני, כאשר $a_1 = -1$**,**

לכן $b_n = a_n + 3 \neq 0$**, שזה תנאי הכרחי לקיומה של סדרה הנדסית (כמובן לא תנאי מספיק).**

יש להוכיח כי הסדרה הנדסית, כאשר נראה כי המנה של $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ היא קבועה.

על פי הגדרת הסדרה b_n

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 3$$
$$b_{n+1} = 4a_n + 9 + 3$$
$$b_{n+1} = 4a_n + 12$$

ועתה נראה כי המנה קבועה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4a_n + 12}{a_n + 3} = \frac{4(a_n + 3)}{a_n + 3} = 4$$

לכן המנה בין שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- n) והסדרה הנדסית.

הוכחנו.

מסקנות עבור הסעיפים הבאים: $q = 4$**,** $b_1 = a_1 + 3 = -1 + 3 = 2$

תשובה: הוכח.

ב. יש למצוא את סכום ארבעת האיברים הראשונים בסדרה b_n

$$S_4 = \frac{2(4^4 - 1)}{4 - 1} = 170$$

תשובה: הסכום הוא 170.

ג. סכום k האיברים העוקבים, החל מ- b_5 הוא $170 + 43350 = 43520$ **.**

האיבר החמישי הוא: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 4^4 = 512$ **.**

נמצא את סכום כל איבריה:

$$\frac{512 \cdot (4^k - 1)}{4 - 1} = 43520$$
$$4^k - 1 = 255$$
$$4^k = 256$$
$$4^k = 4^4$$
$$\boxed{k = 4}$$

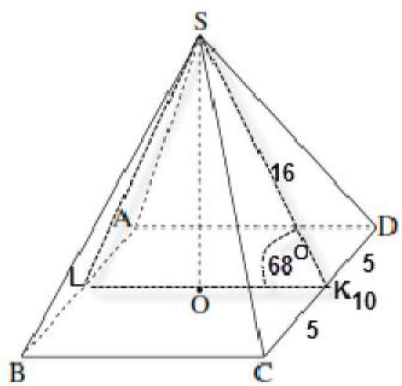
תשובה: $k = 4$**.**

א. בסיס הפירמידה $SABCD$ **הוא מלבן** $ABCD$.

SO**, גובה הפירמידה יורד למפגש אלכסוני המלבן, שהוא מרכז המעגל החוסם.**

SK **הוא גובה הפאה** SCD, **שהיא שוות שוקיים, ולכן גם תיכון ל-** CD.

$\sphericalangle SKO$ **היא הזווית שבין** SK **לבסיס הפירמידה, כי** KO **הוא ההיטל של גובה הפאה לבסיס.**



$\underline{\Delta SKO}$

$$\cos\sphericalangle SKO = \frac{KO}{SK}$$

$$\cos 68° = \frac{KO}{16} \quad /\cdot 16$$

$$16\cos 68° = KO$$

$KO =$ 5.994 **ס"מ**

$BC = 2KO =$ 11.99 **ס"מ**

נימוק: KO **הוא קטע אמצעים ב-** ΔBCD

ושווה למחצית הצלע השלישית.

תשובה: אורך המקצוע BC **הוא** 11.99 **ס"מ.**

ב. SK **הוא גובה הפאה** SCD, **שהיא שוות שוקיים, ולכן גם חוצה זווית הראש.**

(1) נתון גם $CD =$ 10 **ס"מ**, **לכן** $CK =$ 5 **ס"מ**.

$\underline{\Delta SKC}$

$$\tan\sphericalangle CSK = \frac{KC}{SK}$$

$$\tan\sphericalangle CSK = \frac{5}{16}$$

$$\sphericalangle CSK = 17.354°$$

$$\sphericalangle CSD = 2\cdot 17.354° = 34.71°$$

תשובה: $\sphericalangle CSD = 34.71°$.

(2) בסיס הפירמידה הישרה הוא מלבן, שבו הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.

כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה, לכן $\Delta BSA \cong \Delta CSD$ **(לפי משפט חפיפה צלע,צלע,צלע),**

ובהתאם $\sphericalangle BSA = \sphericalangle CSD$ **(זוויות מתאימות במשולשים חופפים).**

תשובה: $\sphericalangle BSA$.

ג. על פי החפיפה, בתת סעיף ב(2) גם $SL = SK$ **(גבהים מתאימים במשולשים חופפים),**

ומכאן ש- ΔLSK **שווה שוקיים ו-** $\sphericalangle LSK = 180° - 2\cdot 68° = 44°$.

תשובה: $\sphericalangle LSK = 44°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^x+\frac{e^2}{e^x}-2e$ **.** e^x **ביטוי חיובי, לכן המכנה חיובי לכל** x **.**

תשובה: הפונקציה מוגדרת לכל x **.**

שתי הצבות במחשבון ומסקנות: $f(-10)=162749\to+\infty$, $f(10)=22021\to+\infty,$ **,**

לכן אין אסימפטוטה אופקית.

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ומתקבל** $f(0)=e^0+\frac{e^2}{e^0}-2e=2.952\quad\to(0,2.952)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=e^x+\frac{e^2}{e^x}-2e\quad(e^x=t)$$
$$0=t+\frac{e^2}{t}-2e$$
$$0=t^2+e^2-2et=t^2-2et+e^2$$
$$0=(t-e)^2\quad\to t=e\quad\to e^x=e\quad\to x=1\quad\to\boxed{(1,0)}$$

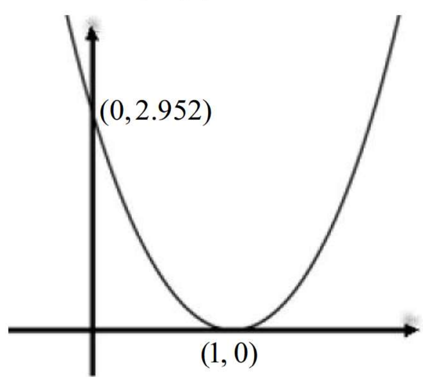
תשובה: $(0,2.952)$ **,** $(1,0)$ **.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה, ולפני כן נרשום את הפונקציה בצורה יותר נוחה.

$$\boxed{f(x)=e^x+e^{2-x}-2e}$$
$$\boxed{f'(x)=e^x-e^{2-x}}$$
$$0=e^x-e^{2-x}$$
$$e^{2-x}=e^x$$
$$2-x=x$$
$$x=1\quad\to\boxed{(1,0)}$$
$$f''(x)=e^x+e^{2-x}>0\quad\to Min$$

תשובה: $(1,0)$ **מינימום.**

ד. הסקיצה המתאימה.



ה. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **, כלומר** $g(x)$ **מוגדרת עבור** $x\neq1$ **כי זו נקודת האפס של** $f(x)$ **.**

בתחום $x\neq1$ $f(x)$ **חיובית ולכן גם** $g(x)$ **חיובית, כי סימני** $g(x)$ **זהים לאלו של** $f(x)$ **, בתחום ההגדרה.**

תשובה: עבור $x\neq1$ $g(x)$ **חיובית.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a\sin(2x)-\frac{1}{2}\sin x$ **בתחום** $0\le x\le 1.5\pi$.

ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$ **מקביל לישר** $y=1.5x+3$ **ולכן מתקיים** $f'(\pi)=1.5$.

$$f'(x)=2a\cos(2x)-\frac{1}{2}\cos x$$

$$1.5=2a\cos(2\cdot\pi)-\frac{1}{2}\cos\pi$$

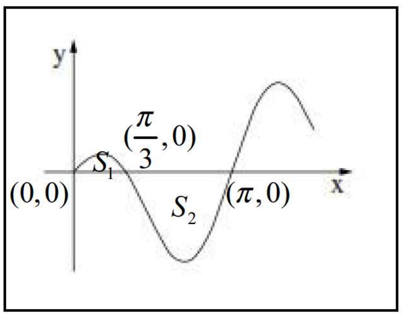
$$1.5=2a+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{a=0.5}$$

תשובה: $a=0.5$.

ב. נציב $a=0.5$ **והפונקציה הנחקרת היא** $f(x)=0.5\sin(2x)-0.5\sin x$ **בתחום** $0\le x\le 1.5\pi$.

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x **, בהן מתקיים** $f(x)=0$.



$$0=0.5\sin(2x)-0.5\sin x$$

$$0=0.5\cdot 2\sin x\cos x-0.5\sin x$$

$$0=0.5\sin x(2\cos x-1)$$

$$\sin x=0 \qquad \cos x=0.5=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

$$x=0 \ \rightarrow \boxed{(0,0)},\quad x=\pi \ \rightarrow \boxed{(\pi,0)} \quad x=\frac{\pi}{3} \ \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{3},0)}$$

וקיבלנו גם את ראשית הצירים כנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

תשובה: $(0,0)$, $(\frac{\pi}{3},0)$, $(\pi,0)$.

ג. נחשב את סכום שני השטחים המבוקשים בתחום $0\le x\le\pi$.

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(0.5\sin 2x-0.5\sin x-0)\,dx$$

$$S_1=(\frac{-\cos 2x}{4}+0.5\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$x=\frac{\pi}{3}:\quad (\frac{-\cos(2\cdot\frac{\pi}{3})}{4}+0.5\cos\frac{\pi}{3})=0.375$$

$$x=0:\quad -(\frac{-\cos(2\cdot 0)}{4}+0.5\cos 0)=0.25$$

$$S_1=0.375-0.25 \ \rightarrow \boxed{S_1=0.125}$$

$$S_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(0-(0.5\sin 2x-0.5\sin x))\,dx$$

$$S_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(-0.5\sin 2x+0.5\sin x)\,dx$$

$$S_2=(\frac{\cos 2x}{4}-0.5\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$S_2=(\frac{\cos(2\cdot\pi)}{4}-0.5\cos\pi)-(\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{3})}{4}-0.5\cos\frac{\pi}{3})$$

$$S_2=0.75-(-0.375) \ \rightarrow \boxed{S_2=1.125}$$

גודל השטח המבוקש $S_1+S_2=0.125+1.125=1.25$

תשובה: גודל השטח הוא 1.25 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_2(x^2)+\frac{1}{3}\ell og_2 x$.

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓog **לא יכולה לקבל מספרים אי-חיוביים.**

$$\left.\begin{matrix} x^2>0 & \to x\neq 0 \\ x>0 & \end{matrix}\right\} x>0$$

תשובה: $x>0$.

ב. כדאי, תחילה, לפשט את תבנית הפונקציה, גם עבור סעיף זה, וגם עבור סעיף ג.

(הערה – הפישוט אפשרי עקב תחום ההגדרה של הפונקציה, $x>0$**.)**

$$f(x)=\ell og_2(x^2)+\frac{1}{3}\ell og_2 x=2\ell og_2 x+\frac{1}{3}\ell og_2 x$$

$$\boxed{f(x)=\frac{7}{3}\ell og_2 x}$$

בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$\frac{7}{3}\ell og_2 x=0 \quad \to \ell og_2 x=0$$

$$x=2^0=1 \quad \to \boxed{(1,0)}$$

לאור תחום ההגדרה, אין נקודת חיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

תשובה: $(1,0)$.

ג. נראה שהפונקציה עולה לכל $x>0$.

$$\boxed{f(x)=\frac{7}{3}\ell og_2 x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x\ell n\,2}}$$

$$x>0,\ \ell n\,2>0 \quad \to f'(x)>0$$

ולכן הפונקציה עולה לכל $x>0$.

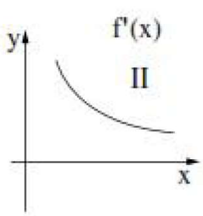
תשובה: הוכח.

ד. גרף II **מתאים לתאר את** $f'(x)$,

כי הוא חיובי לכל $x>0$,

כאשר הצירים מהווים אסימפטוטות לגרף .

תשובה: גרף II .



ה. $f'(x)$ **חיובי בתחום** $1\le x\le 2$**, לכן נחשב את השטח על ידי אינטגרל אחד.**

$$S=\int_1^2 (f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_1^2=f(2)-f(1)=\frac{7}{3}\ell og_2 2-0=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $2\frac{1}{3}$ **יח"ר.**