א. נתונות שתי סדרה הנדסית אין-סופית יורדות $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ **.**

$a_1 , a_2 , a_3 , ...$ I. **שמנתה** $0 < q < 1$ **.**

$b_1 , b_2 , b_3 , ...$ II. **שמנתה** $\frac{1}{2}$ **.**

משתי הסדרות בנו סדרה שלישית, שהיא גם סדרה הנדסית אינסופית יורדת:

$\frac{a_1}{b_1} , \frac{a_2}{b_2} , \frac{a_3}{b_3} , ...$ III. **שמנתה** $0 < q_{\text{III}} < 1$ **.**

נביע באמצעות q **את מנת הסדרה** III **.**

$$q_{\text{III}} = \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{a_{n+1} \cdot b_n}{b_{n+1} \cdot a_n}$$

$$q_{\text{III}} = \frac{a_{n+1} \cdot b_n}{a_n \cdot b_{n+1}}$$

$$q_{\text{III}} = q \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{q_{\text{III}} = 2q}$$

תשובה: מנת הסדרה III **היא** $2q$.

ב. סכום האיברים של סדרה II **הוא** 8**, לכן:** $8 = \frac{b_1}{0.5}$ **ומכאן ש-** $b_1 = 4$ **.**

סכום האיברים של סדרה I **גדול פי** 2 **מסכום האיברים של סדרה** III **.**

$$S_{\text{I}} = 2S_{\text{III}}$$

$$\frac{a_1}{1-q_{\text{I}}} = \frac{2 \cdot \frac{a_1}{b_1}}{1-q_{\text{III}}} \quad \rightarrow \frac{a_1}{1-q} = \frac{2 \cdot \frac{a_1}{4}}{1-2q}$$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{0.5a_1}{1-2q} \quad / : a_1 \neq 0$$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{0.5}{1-2q} \quad \rightarrow 1-2q = 0.5(1-q)$$

$$1-2q = 0.5 - 0.5q \quad \rightarrow -1.5q = -0.5$$

$$\boxed{q = \frac{1}{3}}$$

$$q_{\text{III}} = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

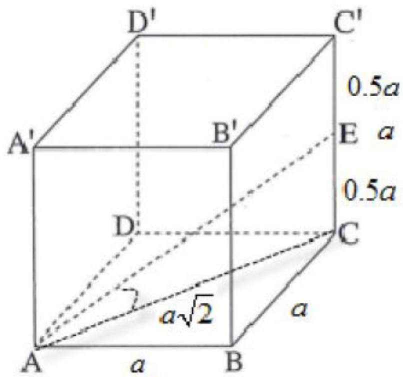
$$\boxed{q_{\text{III}} = \frac{2}{3}}$$

תשובה: מנת הסדרה III **היא** $\frac{2}{3}$ **.**

א. בקובייה כל המקצועות שווים, ובהתאם נסמן ב- a **את אורך מקצוע הקובייה.**

הזווית שבין AE **לבסיס** ABCD **היא** $\sphericalangle EAC$ **,**

הזווית שבין המשופע AE **להיטל שלו לבסיס,** AC **.**



$\underline{\Delta ABC: \text{Pythagoras}}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = a^2 + a^2$

$(AC)^2 = 2a^2$

$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$

$\underline{\Delta EAC: \quad (\sphericalangle ECA = 90°)}$

$\tan \sphericalangle EAC = \frac{EC}{AC} = \frac{0.5a}{a\sqrt{2}}$

$\boxed{\sphericalangle EAC = 19.47°}$

תשובה: הזווית שבין AE **לבסיס** ABCD **היא בת** 19.47°**.**

ב. נתון כי נפח הקובייה הוא 140.608 **סמ"ק.**

כיוון שכל מקצועות הקובייה שווים, אז נפחה הוא a^3 **.**

$a^3 = 140.608$

$a =$ 5.2 **ס"מ**

$AC = 5.2\sqrt{2}$

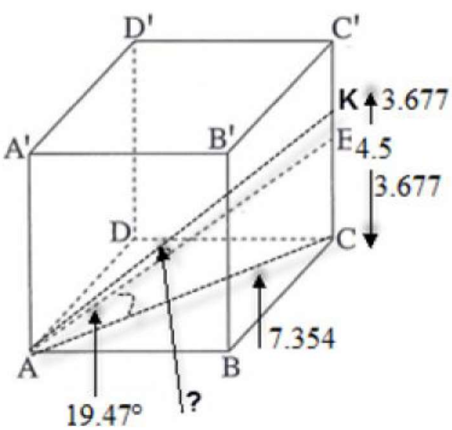
$AC =$ 7.354 **ס"מ**

תשובה: אורך הקטע AC **הוא** 7.354 **ס"מ.**

ג. נחשב את הזווית המבוקשת על-פי הפרשי זוויות: $\sphericalangle KAE = \sphericalangle KAC - \sphericalangle EAC$ **.**

$CE = 7.354 : 2 =$ 3.677 **ס"מ**

נתון כי 4.5 **ס"מ** $= CK$**, לכן** K **בין** E **ל-** C' .



$\underline{\Delta KAC: \quad (\sphericalangle KCA = 90°)}$

$\tan \sphericalangle KAC = \frac{KC}{AC} = \frac{4.5}{7.354}$

$\boxed{\sphericalangle KAC = 31.46°}$

$\sphericalangle KAE = 31.46° - 19.47° = 11.99°$

תשובה: $\sphericalangle KAE = 11.99°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x) = -\sin 2x$ **בתחום** $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$.

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **בתחום הנתון.**

$$-\sin 2x = 0$$
$$\sin 2x = 0$$
$$2x = \pi k$$
$$x = \frac{\pi}{2}k$$

עבור $k=0$ **נקבל את שיעור ה-** x **של נקודת החיתוך הראשונה, ובהתאם:** $\mathrm{O}(0\,,0)$.

עבור $k=1$ **נקבל את שיעור ה-** x **של נקודת החיתוך השנייה, ובהתאם:** $\mathrm{A}(\frac{\pi}{2}\,,0)$.

נמצא את שיפוע המשיקים ואת משוואות המשיקים.

$$\boxed{f'(x) = 2\cos 2x}$$

$\mathrm{O}(0\,,0)$

$m = -2\cos(2\cdot 0) = -2$

$y - 0 = -2(x-0)$

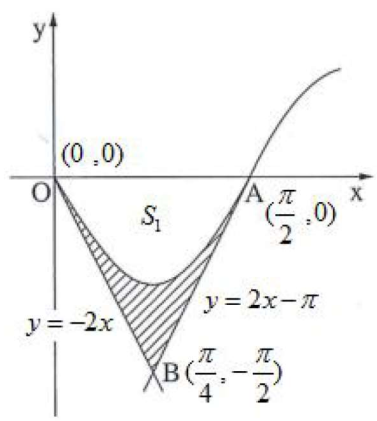
$\boxed{y = -2x}$

$\mathrm{A}(\frac{\pi}{2}\,,0)$

$m = -2\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) = 2$

$y - 0 = 2(x - \frac{\pi}{2})$

$\boxed{y = 2x - \pi}$



תשובה: $y=-2x$ **,** $y = 2x-\pi$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת מפגש המשיקים.

$$2x - \pi = -2x$$
$$4x = \pi$$
$$x = \frac{\pi}{4} \quad \to y = -2\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \to \boxed{\mathrm{B}(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})}$$

תשובה: $\mathrm{B}(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$

ג. נחשב את שטח המשולש שבין המשיקים וציר ה- x **ונפחית ממנו את השטח** S_1 **שבין הפונקציה לציר ה-** x.

שטח המשולש: $\dfrac{(\frac{\pi}{2}-0)\cdot\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0-(-\sin 2x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)dx = \frac{-\cos 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}{2}) - (-\frac{\cos(2\cdot 0)}{2})$$

$$S_1 = (\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = 1$$

תשובה: השטח המבוקש: $\frac{\pi^2}{8} - 1 \approx 0.2337$ **יח"ר.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}}{2x^2}$. x^2 מתאפס עבור $x=0$.

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x\neq 0$.

ארבע הצבות במחשבון ומסקנות:

$f(-10)=1.03\cdot 10^{-11}\to +0$, $f(10)=2425825\to +\infty$ **- לכן, $y=0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

$f(-0.01)=4900\to +\infty$, $f(0.01)=5101\to +\infty$ **- לכן, $x=0$ אסימפטוטה אנכית.**

(2) על פי ההצבות וכן על פי העובדה ש- $x=0$ מאפס מכנה ולא מונה , הישר $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x=0$.

ב. (1) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{2x}}{2x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot 2x^2-4x\cdot e^{2x}}{(2x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4e^{2x}(x^2-x)}{4x^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}(x^2-x)}{x^4}}$$

$$0=x^2-x$$

$$x(x-1)=0$$

הביטוי שבמונה הנגזרת מתאפס עבור $x=1$ (e^{2x} חיובי , ועל פי תחום ההגדרה $x\neq 0$).

לביטוי זה פרבולה מחייכת ("צוחקת"),

העוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=0$, ומשליליות לחיוביות עבור $x=1$.

תשובה: עלייה : $x>1$ או $x<0$, ירידה $0<x<1$.

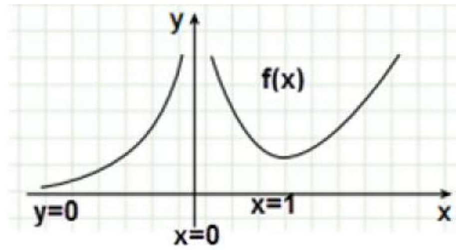
(2) אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y כי תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

הביטוי e^{2x} שבמונה הפונקציה חיובי ולכן אין נקודת חיתוך גם עם ציר ה- x .

למעשה, גם המכנה חיובי בתחום ההגדרה ולכן ערכי הפונקציה חיוביים תמיד.

תשובה: אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) סקיצה של גרף הפונקציה:



ג. גרף I הוא הגרף המתאים.

<u>נימוקים</u> (חשוב לתת לפחות שלושה)

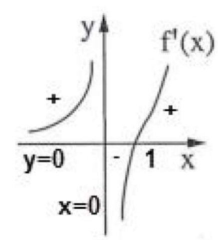
(1) הגרף עובר משליליות לחיובית בתחום בו $x=1$ אפשרי כנקודת חיתוך.

(2) הגרף חיובי עבור $x<0$, בתחום בו הפונקציה עולה

(3) הגרף אינו חותך את ציר ה- y , ומתאים לעובדה ש- $x=0$ לא בתחום ההגדרה של $f'(x)$.

(4) לגרף אסימפטוטה אופקית $y=0$ לשמאל, תואם הצבה מתאימה בפונקציית הנגזרת של (-10) .

I



תשובה: גרף I הוא הגרף המתאים.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2(\ell n\, x)^2$.

יש לוודא שהביטוי שמקבלת הפונקציה $\ell n\, x$ **חיובי ולכן** $x>0$.

תחום ההגדרה: $x>0$

ב. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **ואת סוגן.**

$$f'(x)=2x(\ell n\, x)^2+x^2\cdot 2(\ell n\, x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=2x\ell n\, x(\ell n\, x+1)}$$

$$\ell n\, x=0 \quad \rightarrow x=1 \quad \rightarrow y=1^2\cdot(\ell n 1)^2=0 \quad \rightarrow \boxed{(1,0)}$$

$$\ell n\, x=-1 \quad \rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e} \quad \rightarrow y=(\frac{1}{e})^2\cdot(\ell n(\frac{1}{e}))^2=\frac{1}{e^2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{1}{e},\frac{1}{e^2})}$$

הביטוי $2x$ **חיובי, כי תחום ההגדרה הוא** $x>0$.

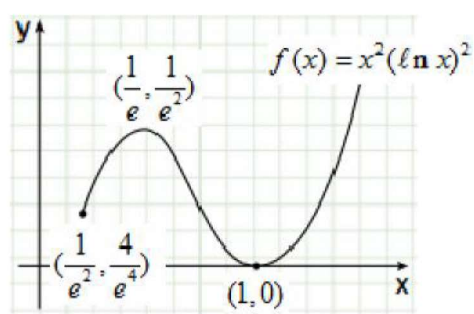
x	0		$\frac{1}{e}$		1	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
מסקנה		↗	Max	↘	Min	↗

תשובה: $(1,0)$ **מינימום ,** $(\frac{1}{e},\frac{1}{e^2})$ **מקסימום.**

ג. נציב $x=\frac{1}{e^2}$ **לקבלת שיעורי נקודת הקצה, בתחום** $x\geq\frac{1}{e^2}$.

$$x=\frac{1}{e^2} \quad \rightarrow y=(\frac{1}{e^2})^2(\ell n(\frac{1}{e^2}))^2=\frac{4}{e^4} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{1}{e^2},\frac{4}{e^4})}$$

<u>הסקיצה המתאימה</u>



ד. (1) על פי תחומי עלייה וירידה של הפונקציה (ראה טבלת עלייה וירידה בסעיף ג),

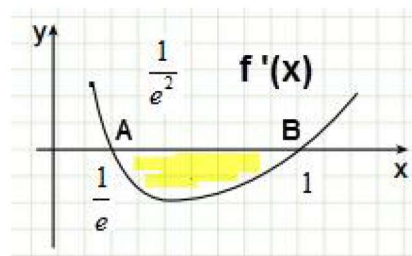
נקבל את תחומי החיוביות שליליות של פונקציית הנגזרת, בתחום $x \geq \frac{1}{e^2}$.

$f'(x) > 0$ עבור $\frac{1}{e^2} \leq x < \frac{1}{e}$, או $x > 1$.

$f'(x) < 0$ עבור $\frac{1}{e} \leq x < 1$, או $x > 1$.

$f'(x) = 0$ עבור $x = \frac{1}{e}$, או $x = 1$.

<u>**הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח עבור סעיף (2)**</u>



(2) נחשב את השטח, הצבוע בצהוב.

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (0 - f'(x))\, dx$$

$$S = -f(x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$S = -f(1) - (-f(\frac{1}{e})) = 0 + \frac{1}{e^2}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{e^2}}$$

תשובה: השטח המבוקש הוא $\frac{1}{e^2}$.