א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, ...$ **(** $x>1$ **).**

האיבר הכללי של הסדרה הוא $a_n = \frac{1}{x^{n-1}}$ **ומנתה** $\frac{1}{x}$ **.**

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{\frac{1}{x^{n+1}}}{\frac{1}{x^{n-1}}}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}}$$

$$\boxed{\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{x^2}}$$

תשובה: מנת הסדרה של האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה היא $\frac{1}{x^2}$**.**

ב. סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $\frac{4}{3}$ **.**

כיוון ש - $0 < \frac{1}{x} < 1$**, אז גם** $0 < \frac{1}{x^2} < 1$ **- וזהי סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת.**

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$4(1-\frac{1}{x^2}) = 3$$

$$1-\frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = 4$$

$$\boxed{x=2} \leftarrow x>0$$

תשובה: $x=2$ **.**

ג. בסדרת ריבועי האיברים, העומדים במקומות הזוגיים, האיבר הראשון הוא $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$**.**

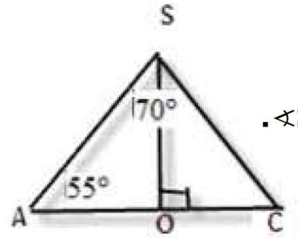
מנת הסדרה היא $\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{(a_{n+2})^2}{(a_n)^2} = (\frac{a_{n+2}}{a_n})^2 = (q^2)^2 = q^4 = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

$$S^b = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{4}{15}$$

תשובה: סכום הסדרה הוא $\frac{4}{15}$ **.**

א. בסיס הפירמידה הישרה $SABCD$ **הוא מלבן, שבו האלכסונים שווים וחוצים זה את זה.**

הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם, ובמקרה זה למפגש אלכסוני המלבן.



$\sphericalangle ASC = 70°$ **,** ΔSAC **הוא שווה שוקיים**

(מקצועות צדדיים שווים זה לזה), $\sphericalangle SAO = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$ **.**

תשובה: גודל הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס הוא $55°$**.**

ב. נחשב את נפח הפירמידה.

$\underline{\Delta ABC}$

$$\tan 50° = \frac{BC}{AB}$$

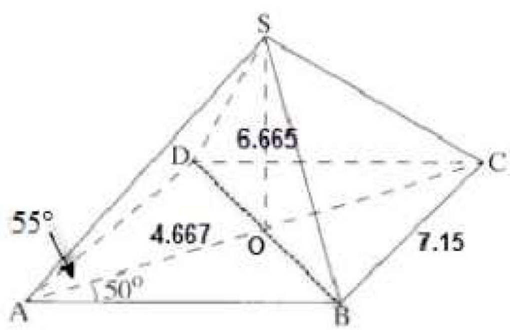
$$6 \tan 50° = BC$$

$BC =$ **ס"מ** 7.15

שטח הבסיס: $7.15 \cdot 6 =$ **סמ"ר** 42.9 **.**

על פי משפט פיתגורס ΔABC **:** $AC = \sqrt{6^2 + 7.15^2} =$ **ס"מ** 9.33 **, ולכן** $AO = 9.33 : 2 =$ **ס"מ** 4.667 **.**

נחשב את גובה הפירמידה.



$\underline{\Delta ASO}$

$$\tan 55° = \frac{SO}{AO}$$

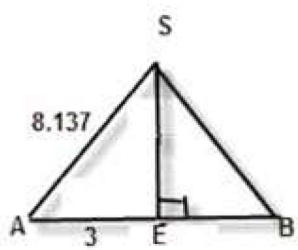
$$4.667 \tan 55° = SO$$

$SO =$ **ס"מ** 6.665

נפח הפירמידה הוא $\frac{42.9 \cdot 6.665}{3} =$ **סמ"ק** 95.32 **.**

תשובה: נפח הפירמידה הוא 95.32 **סמ"ק.**

ג. על פי משפט פיתגורס ΔASO **:** $AS = \sqrt{4.667^2 + 6.665^2} =$ **ס"מ** 8.137 **.**



במשולש שווה שוקיים, של הפאה SAB**,**

הגובה לבסיס מתלכד עם התיכון וחוצה זווית הראש.

$\underline{\Delta ASE}$

$$\sin \sphericalangle ASE = \frac{AE}{AS} = \frac{3}{8.137}$$

$$\sphericalangle ASE = 21.64° \rightarrow \boxed{\sphericalangle ASB = 43.27°}$$

תשובה: $\sphericalangle ASB = 43.27°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x+\sin(2x)$ **בתחום** $0\le x\le\pi$ **.**

$g(x)=f'(x)$ **ובהתאם** $g(x)=1+2\cos 2x$**.**

נמצא תחילה את נקודות הקצה.

$$g(0)=1+2\cos(2\cdot 0)=3 \quad\rightarrow \boxed{(0,3)}$$

$$g(\pi)=1+2\cos(2\cdot\pi)=3 \quad\rightarrow \boxed{(\pi,3)}$$

(1) נמצא את נקודות חיתוך של $g(x)=1+2\cos 2x$ **עם ציר ה-** x **.**

$$0=1+2\cos 2x$$

$$\cos 2x=-0.5=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \qquad 2x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$$

$$k=0:(\frac{\pi}{3},0) \qquad k=1:(\frac{2\pi}{3},0)$$

תשובה: $(\frac{\pi}{3},0)$ **,** $(\frac{2\pi}{3},0)$ **.**

(2) נמצא נקודות קיצון פנימיות.

$$\boxed{g'(x)=-4\sin 2x}$$

$$0=-4\sin 2x$$

$$0=\sin 2x$$

$$2x=180^\circ k \quad :2$$

$$\boxed{x=90^\circ k} \quad\rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}k}$$

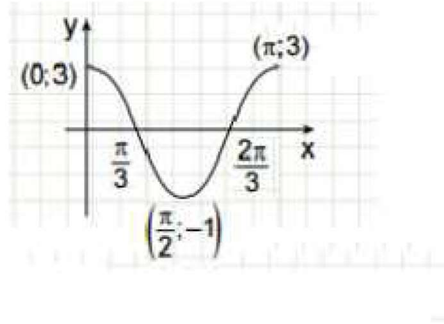
k	$x=\frac{\pi}{2}k$
1	$x=\frac{\pi}{2}\rightarrow(\frac{\pi}{2},-1)$

נבנה טבלה לזיהוי נקודות קיצון המוחלט, בעזרת ערכי הפונקציה .

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	3		-1		3
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(0,3)$ **,** $(\pi,3)$ **מקסימום מוחלט ,** $(\frac{\pi}{2},-1)$ **מינימום מוחלט.**

(3) הסקיצה המתאימה.



ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ **שלילי , כאשר** $g(x)=f'(x)<0$.

על פי הגרף בתת סעיף א(3) – אי שוויון זה מתקיים עבור $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$**.**

תשובה: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$ **.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}+e^{4-2x}+2$.

שתי הצבות במחשבון ומסקנות:

$f(10)=485165197\to+\infty,\quad f(-10)=2.6\cdot10^{10}\to+\infty$ -

לכן, אין אסימפטוטות המקבילות לצירים והגרף יתחיל בירידה ויסתיים בעלייה.

$f(0)=e^{2\cdot0}+e^{4-2\cdot0}+2=3+e^{4}=57.6$ **, ובהתאם** $(0,57.6)$ **נקודת חיתוך עם ציר ה-** y .

תשובה: $(0,57.6)$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$\boxed{f'(x)=2e^{2x}-2e^{4-2x}}$$

$$0=2e^{2x}-2e^{4-2x}$$

$$2e^{4-2x}=2e^{2x}\quad /:2$$

$$e^{4-2x}=e^{2x}$$

$$4-2x=2x$$

$$-4x=-4\quad /:(-4)$$

$$x=1$$

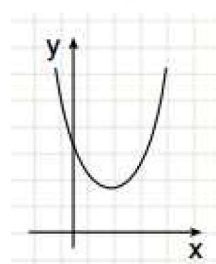
$$f(1)=e^{2\cdot1}+e^{4-2\cdot1}+2=2+2e^{2}=16.78$$

$$\boxed{(1,16.78)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=-107<0 \\ f'(2)=107>0 \end{array}\right\}(1,16.78),Min$$

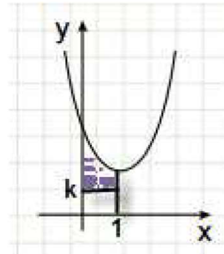
תשובה: $(1,16.78)$ **מינימום.**

(3) הסקיצה המתאימה.



ב. כיוון שהערך המינימלי של הפונקציה הוא 16.78**, ונתון כי** $0<k<16$ **,**

אז הישר $y=k$ **עובר מתחת לנקודת המינימום.**



נחשב את השטח המבוקש.

$$S=\int_0^1 (e^{2x}+e^{4-2x}+2-k)\,dx$$

$$S=(\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{4-2x}}{-2}+2x-kx)\Big]_0^1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1: \quad \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+2-k=2-k \\ x=0: \quad \frac{1}{2}-\frac{e^4}{2} \end{array}\right\} 2-k-\frac{1}{2}+\frac{e^4}{2}$$

$$2-k-\frac{1}{2}+\frac{e^4}{2}=\frac{e^4}{2}-8\frac{1}{2}$$

$$\boxed{k=10}$$

תשובה: $k=10$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-\ell n(x^2)-3$.

נמצא את תחום ההגדרה: הביטוי שמקבלת פונקציית ה- ℓn **לא יכול להיות אי-חיובי.**

$x^2>0$ **ולכן** $x\neq 0$.

תשובה: $x\neq 0$.

ב. נכין טבלת ערכים קטנה, לפני החקירה (תמיד מומלץ).

x	$f(x)$	מסקנה
0.00001 −0.00001	15.42 20.02	**כאשר** $f(x)$ **שואף לאפס,** **הישר** $x=0$ **מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**
10,000 −10,000	99999978 99999978	**עבור** $x\to+\infty$ **מתקיים** $f(x)\to+\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית** **עבור** $x\to-\infty$ **מתקיים** $f(x)\to+\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית**

תשובה: $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x^2-2}{x}}$$

$$\frac{2x^2-2}{x}=0$$

$$2x^2-2=0$$

$$2(x^2-1)=0$$

$$x=1 \quad\to f(1)=1^2-\ell n(1^2)-3=-2 \quad\to(1,-2)$$

$$x=-1 \quad\to f(-1)=(-1)^2-\ell n(-1^2)-3=-2 \quad\to(-1,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0.5)=\dfrac{2\cdot 0.5^2-2}{0.5}<0 \\ f'(2)=\dfrac{2\cdot 2^2-2}{2}>0 \end{array}\right\}\boxed{(1,-2),\min}$$

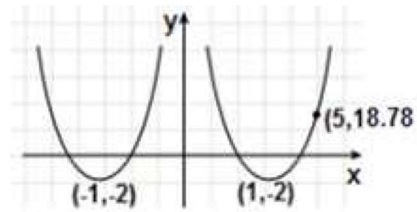
$$\left.\begin{array}{l} f'(-2)=\dfrac{2\cdot(-2)^2-2}{-2}<0 \\ f'(-0.5)=\dfrac{2\cdot(-0.5)^2-2}{-0.5}>0 \end{array}\right\}\boxed{(-1,-2),\min}$$

תשובה: $(1,-2)$ **,** $(-1,-2)$ **מינימום.**

ד. (1) $f(5)=5^2-\ell n(5^2)-3=18.78$ **.**

תשובה: $f(5)=18.78$ **.**

(2) הסקיצה המתאימה.



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+2$ **, שהיא תזוזה אנכית של** $f(x)$ **ב-** 2 **יחידות, כלפי מעלה.**

במקרה זה, שתי נקודות המינימום תהיינה נקודות השקה לציר ה- x **ושאר הגרף יהיה מעל לציר.**

תשובה: שתי נקודות חיתוך.