א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1}=a_n-4$, לכל n טבעי.

מכאן ש: $a_{n+1}-a_n=-4$ והסדרה היא חשבונית, כאשר $d=-4$,

כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע (לא תלוי ב- n).

$$a_3=12$$
$$a_1+2d=12$$
$$a_1+2\cdot(-4)=12$$
$$\boxed{a_1=20}$$

תשובה: האיבר הראשון של הסדרה הוא 20.

ב. נתון כי בסדרה 71 איברים.

האיבר הראשון, בעשרת האיברים האחרונים,

הוא a_{62} $(71-10+1=62)$.

$$a_{62}=a_1+(62-1)\cdot d$$
$$a_{62}=20+61\cdot(-4)$$
$$a_{62}=-224$$

$$S_{last\,10}=\frac{10\left[2\cdot(-224)+(10-1)\cdot(-4)\right]}{2}$$
$$S_{last\,10}=5\left[-448-36\right]$$
$$\boxed{S_{last\,10}=-2,420}$$

תשובה: סכום 10 האיברים האחרונים בסדרה הוא $-2,420$.

ג. נתון כי בסדרה 71 איברים. האיבר האמצעי הוא a_{36} $(\frac{71+1}{2}=36)$.

$$a_{36}=a_1+(36-1)\cdot d$$
$$a_{36}=20+35\cdot(-4)$$
$$\boxed{a_{36}=-120}$$

תשובה: האיבר האמצעי בסדרה הוא -120 .

א. בסיס המנסרה ABC הוא משולש שווה שוקיים, שבו הגובה לבסיס הוא גם תיכון וחוצה זווית הראש.

נוריד AT גובה לבסיס ב- ΔABC, ובהתאם: $\sphericalangle CAT = \frac{54°}{2} = 27°$, $CT = \frac{7}{2} = 3.5$.

$\underline{\Delta ATC}$

$$\sin 27° = \frac{TC}{AC}$$

$$AC = \frac{3.5}{\sin 27°}$$

$AC =$ **ס"מ** 7.709

הזווית בין האלכסון $A'C$ לבסיס היא $\sphericalangle A'CA = 65°$**, שבין $A'C$, להיטל שלו AC לבסיס.**

$\underline{\Delta A'CA}$

$$\tan 65° = \frac{A'A}{AC}$$

$$7.709 \tan 65° = A'A$$

$A'A =$ **ס"מ** 16.53

שטח מלבן הפאה $ACC'A'$: 127.45 **סמ"ר**$= 7.709 \cdot 16.53$.

תשובה: שטח מלבן הפאה $ACC'A'$ הוא 127.45 סמ"ר.

ב. כיוון שבסיס המנסרה, ΔABC, הוא משולש שווה שוקיים,

אז $\Delta ABA' \cong \Delta ACA'$ (צ.ז.צ), ומתקבל שגם $\Delta CA'B$ שווה שוקיים,

כאשר $A'T$ גובה לבסיס שלו, וגם תיכון.

הזווית בין הגובה $A'T$ לבסיס המנסרה היא $\sphericalangle A'TA$, שבין $A'T$, להיטל שלו AT לבסיס.

$\underline{\Delta ATC}$

$$\tan 27° = \frac{TC}{AT}$$

$$AT = \frac{3.5}{\tan 27°}$$

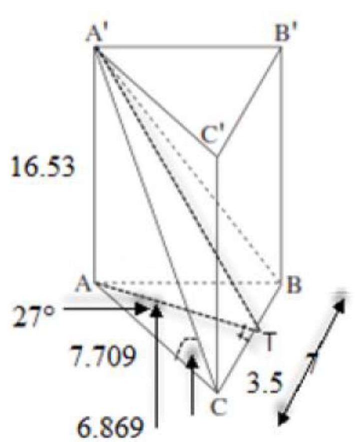
$AT =$ **ס"מ** 6.869

$\underline{\Delta A'TA}$

$$\tan \sphericalangle A'TA = \frac{A'A}{AT}$$

$$\tan \sphericalangle A'TA = \frac{16.53}{6.869}$$

$$\sphericalangle A'TA = 67.43°$$



תשובה: הזווית בין הגובה $A'T$ לבסיס המנסרה היא בת $67.43°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=3-\sin^2 x-\cos x$ **בתחום** $-\pi \le x \le \pi$ **.**

נמצא תחילה את נקודות הקצה.

$$f(-\pi)=3-\sin^2(-\pi)-\cos(-\pi)=4 \quad \rightarrow \boxed{(-\pi,4)}$$

$$f(\pi)=3-\sin^2(-\pi)-\cos(-\pi)=4 \quad \rightarrow \boxed{(\pi,4)}$$

נמצא נקודות קיצון פנימיות.

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+\sin x$$

$$0=\sin x(-2\cos x+1)$$

$$\sin x=0 \qquad \cos x=0.5=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x=\pi k} \qquad \boxed{x=\frac{\pi}{3}+2\pi k} \qquad \boxed{x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k}$$

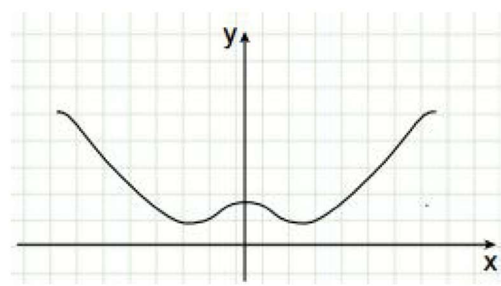
הפתרונות, הפנימיים, בתחום ההגדרה, הם: $(0,2)$ **,** $(\frac{\pi}{3},1.75)$, $(-\frac{\pi}{3},1.75)$**.**

נבנה טבלה לזיהוי נקודות קיצון, בעזרת ערכי הפונקציה.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f(x)$	4		1.75		2		1.75		4
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(-\pi,4)$ **,** $(0,2)$, $(\pi,4)$ **מקסימום,** $(-\frac{\pi}{3},1.75)$ **,** $(\frac{\pi}{3},1.75)$ **מינימום.**

ב. הסקיצה המתאימה.



ג. (1) על פי טבלת העלייה והירידה בסעיף א , ניתן לדעת את סימני הנגזרת בתחום $0 \le x \le \pi$.

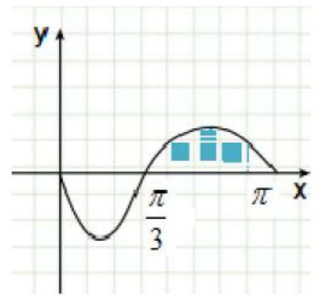
כאשר $f(x)$ עולה , בתחום $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ - אז $f'(x)$ חיובית.

כאשר $f(x)$ יורדת , בתחום $0 < x < \frac{\pi}{3}$ - אז $f'(x)$ שלילית.

כמו כן, נמצא את ערכי הנגזרת בקצוות:

$$f'(0) = -2\sin 0 \cos 0 + \sin 0 = 0 \quad \to (0,0)$$
$$f'(\pi) = -2\sin \pi \cos \pi + \sin \pi = 0 \quad \to (\pi,0)$$

בהתאם הסקיצה המתאימה, כולל סימון השטח עבור תת סעיף ג(2).



(2) נחשב את גודל השטח המבוקש.

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (f'(x) - 0)\, dx$$

$$S = f(x)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = \pi: & f(\pi) = 4 \\ x = \frac{\pi}{3}: & f(\frac{\pi}{3}) = 1.75 \end{array}\right\} S = 4 - 1.75 = 2.25$$

תשובה: גודל השטח הוא 2.25 יח"ר.

א. נתונות שתי פונקציות $f(x)=e^x$, ו- $g(x)=e^{3-x}$.

ארבע הצבות במחשבון ומסקנות, שעוזרות לצייר את הגרפים של הפונקציות:

$f(-10)=4.5\cdot10^{-5}\to0,\quad f(10)=22026\to+\infty$ **- ולכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

$g(-10)=442413\to\infty,\quad g(10)=9.1\cdot10^{-4}\to0$ **- ולכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

לשתי הפונקציות אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x**, כי** e **בחזקת ביטוי כל שהוא, חיובי תמיד.**

$$f(0)=e^0=1\to(0,1),\quad f(0)=e^{3-0}=e^3\to(0,e^3)$$

תשובה: נקודות חיתוך עם ציר ה- y **:** $f(x)$ **-** $(0,1)$ **,** $g(x)$ **-** $(0,e^3)$**.**

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות.

$f'(x)=e^x>0$ **, ולכן הפונקציה עולה לכל** x**.**

$g'(x)=-e^{3-x}<0$ **, ולכן הפונקציה יורדת לכל** x**.**

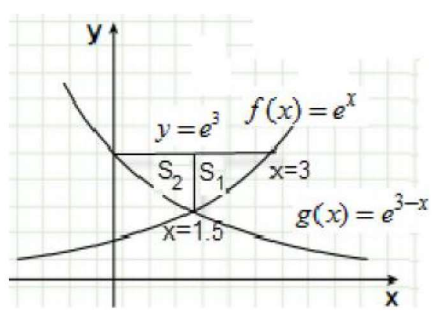
תשובה: $f(x)$ **עולה לכל** x**, יורדת לאף** x**.** $g(x)$ **יורדת לכל** x**, עולה לאף** x**.**

ג. (1) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

$$e^x=e^{3-x}$$
$$x=3-x$$
$$x=1.5\quad\to(1.5,e^{1.5})$$

תשובה: $(1.5,e^{1.5})$**.**

(2) הסקיצה המתאימה, כולל הישר $y=e^3$ **עבור תת סעיף ג(3).**



(3) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הישר $y=e^3$ **עם שתי הפונקציות.**

$$e^x=e^3\quad\to x=3\quad\to(3,e^3)$$
$$e^{3-x}=e^3\quad\to x=0\quad\to(0,e^3)$$

נחשב את השטח המבוקש, על ידי חלוקתו לשני שטחים.

$$S_1 = \int_{1.5}^{3} (e^3 - e^x)\, dx$$

$$S_1 = (e^3 x - e^x)\Big]_{1.5}^{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3: \quad 3e^3 - e^3 = 2e^3 \\ x = 1.5: \quad 1.5e^3 - e^{1.5} \end{array}\right\} S_1 = 0.5e^3 + e^{1.5}$$

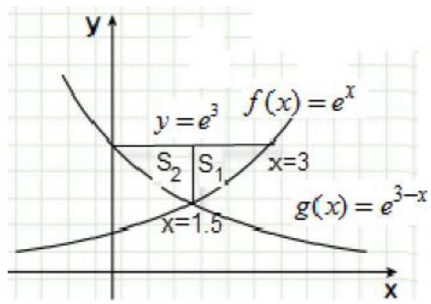
$$S_2 = \int_{1.5}^{3} (e^3 - e^{3-x})\, dx$$

$$S_2 = (e^3 x + e^{3-x})\Big]_{0}^{1.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1.5: \quad 1.5e^3 + e^{1.5} \\ x = 0: \quad e^3 \end{array}\right\} S_2 = 0.5e^3 + e^{1.5}$$

וגודל השטח המבוקש: $S_1 + S_2 = e^3 + 2e^{1.5}$

תשובה: $e^3 + 2e^{1.5} \approx 29.05$ **יח"ר.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^m-\ell n\,x^4$.

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓn **לא יכולה לקבל מספרים אי-חיוביים.**

$x^4>0$ **ולכן** $x\neq 0$.

תשובה: $x\neq 0$.

ב. עבור $x=1$ **לפונקציה קיימת נקודת קיצון, לכן** $f'(1)=0$.

$$f'(x)=mx^{m-1}-\frac{4x^3}{x^4}$$

$$0=m\cdot 1^{m-1}-\frac{4\cdot 1^3}{1^4}$$

$$0=m-4$$

$$\boxed{m=4}$$

תשובה: $m=4$

ג. נציב $m=4$ **והפונקציה היא** $f(x)=x^4-\ell n\,x^4$.

נכין טבלת ערכים קטנה, לפני החקירה (תמיד מומלץ).

x	$f(x)$	מסקנה
0.00001 -0.00001	46.05 46.05	**כאשר** $f(x)$ **שואף לאפס,** **הישר** $x=0$ **מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**
$10,000$ $-10,000$	10^{16} 10^{16}	**עבור** $x\to+\infty$ **מתקיים** $f(x)\to+\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית** **עבור** $x\to-\infty$ **מתקיים** $f(x)\to+\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית**

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=4x^3-\frac{4x^3}{x^4}$$

$$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4x^4-4}{x}}$$

$$\frac{4x^4-4}{x}=0$$

$$4x^4-4=0$$

$$4(x^4-1)=0$$

$$x=1 \quad \to f(1)=1^4-\ell n 1^4=1 \quad \to (1,1)$$

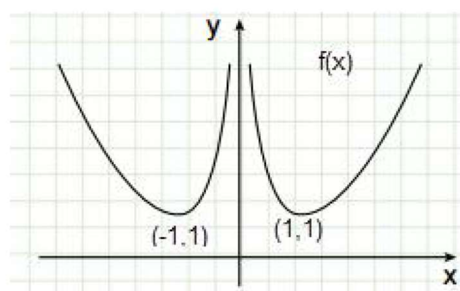
$$x=-1 \quad \to f(-1)=(-1)^4-\ell n(-1)^4=1 \quad \to (-1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0.5)&=\frac{4\cdot 0.5^4-4}{0.5}<0 \\ f'(2)&=\frac{4\cdot 2^4-4}{2}>0 \end{aligned}\right\}\boxed{(1,1),\min}$$

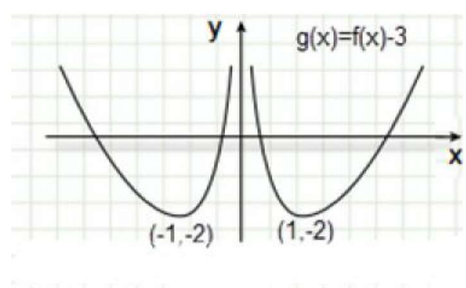
$$\left.\begin{aligned} f'(-2)&=\frac{4\cdot(-2)^4-4}{-2}<0 \\ f'(-0.5)&=\frac{4\cdot(-0.5)^4-4}{-0.5}>0 \end{aligned}\right\}\boxed{(-1,1),\min}$$

תשובה: $(1,1)$ **,** $(-1,1)$ **מינימום.**

ד. הסקיצה המתאימה:



ה. הפונקציה $g(x)=f(x)-3$ **היא תזוזה אנכית ב-** 3 **יחידות כלפי מטה של** $f(x)$ **.**



תשובה: גרף הפונקציה $g(x)=f(x)-3$ **חותך את ציר ה-** x **בארבע נקודות.**