א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1}=a_n+2n+5$ **,** $a_1=0$**, לכל** n **טבעי.**

$$(n=1)\quad a_2=a_1+2\cdot 1+5=0+2+5=7 \quad\rightarrow \boxed{a_2=7}$$
$$(n=2)\quad a_3=a_2+2\cdot 2+5=7+4+5=16 \quad\rightarrow \boxed{a_3=16}$$

תשובה: $a_2=7$ **,** $a_3=16$**.**

ב. מגדירים סדרה חדשה: $b_n=a_{n+1}-a_n$**.**

$$b_n=a_{n+1}-a_n$$
$$b_n=a_n+2n+5-a_n$$
$$\boxed{b_n=2n+5}$$

תשובה: $b_n=2n+5$**.**

ג. נראה שהסדרה b_n **היא סדרה חשבונית.**

$$b_{n+1}-b_n=2(n+1)+5-(2n+5)$$
$$b_{n+1}-b_n=2n+2+5-2n-5$$
$$\boxed{b_{n+1}-b_n=2}$$

הסדרה חשבונית כי ההפרש בין כל איבר לזה שקודם לו (עבור $n\geq 2$**)**
הוא קבוע (אינו תלוי ב- n**), ולכן:** $d=2$**.**
תשובה: הוכח, הפרש הסדרה הוא 2**.**

ד. נתון שסכום n **האיברים הראשונים בסדרה** b_n **שווה ל-** a_5.

$$(n=3)\quad a_4=a_3+2\cdot 3+5=16+6+5=27 \quad\rightarrow \boxed{a_4=27}$$
$$(n=4)\quad a_5=a_4+2\cdot 4+5=27+8+5=40 \quad\rightarrow \boxed{a_5=40}$$
$$S_n^b=40$$
$$b_1=2\cdot 1+5=7 \quad\rightarrow \boxed{b_1=7},\quad d^b=2$$
$$40=\frac{n\left[2\cdot 7+2(n-1)\right]}{2}$$
$$80=n(14+2n-2)$$
$$2n^2+12n-80=0$$
$$\boxed{n=4}\quad \cancel{n=-10}\quad \leftarrow n\ natural$$

תשובה: $n=4$**.**

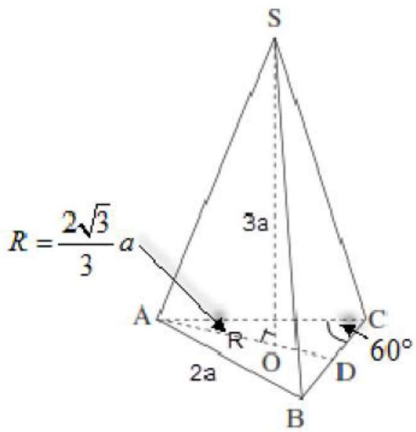
א. בסיס הפירמידה הישרה SABC **הוא משולש שווה צלעות, שזוויותיו שוות ל-** $60°$ **.**

הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים,

ובמקרה זה, של מש"ץ, גם למפגש תיכונים המחלקים זה את זה ביחס $2:1$ **מהקדקוד.**

מכאן ש- $AO = R$ **, רדיוס המעגל החוסם, ו-** $AD = 1.5R$ **.**

על פי משפט הסינוסים ב- ΔABC **:**



$$\frac{AB}{\sin 60°} = 2R$$

$$\frac{2a}{2\sin 60} = R$$

$$\boxed{R = \frac{2\sqrt{3}}{3}a}$$

$$AD = 1.5 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\boxed{AD = a\sqrt{3}}$$

תשובה: $AD = a\sqrt{3}$ **.**

ב. נתון כי נפח הפירמידה הוא $a^3\sqrt{3}$ **.**

$$V = \frac{(0.5 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60°) \cdot SO}{3}$$

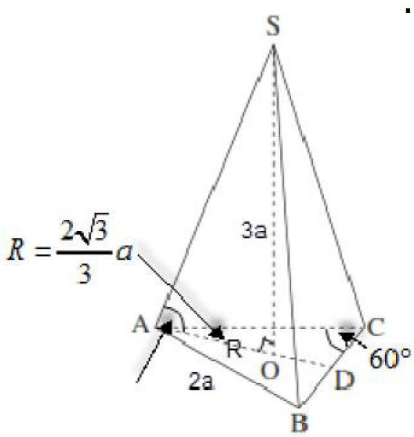
$$a^3\sqrt{3} = \frac{0.5 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot SO}{3}$$

$$3a^3\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \cdot SO \quad / : a^2\sqrt{3} > 0$$

$$\boxed{SO = 3a}$$

תשובה: $SO = 3a$ **.**

ג. נחשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס, לדוגמה $\sphericalangle SAO$ **.**



$\underline{\Delta SAO}$

$$\tan \sphericalangle SAO = \frac{SO}{AO} = \frac{3a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle SAO = 68.95°}$$

תשובה: הזווית שבין מקצוע הצדדי לבסיס היא בת $68.95°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x+4\cos x$ **בתחום** $0\le x\le \pi$.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=2\cdot 0+4\cos 0=4$.

תשובה: $(0,4)$.

ב. נמצא תחילה את נקודת הקצה השנייה, פרט ל- $(0,4)$.

$$f(\pi)=2\cdot\pi+4\cos\pi=2\pi-4=2.283 \quad\to \boxed{(\pi\,,2.283)}$$

נמצא נקודות קיצון פנימיות.

$$\boxed{f'(x)=2-4\sin x}$$

$$0=2-4\sin x$$

$$\sin x=0.5=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+2\pi k} \quad \boxed{x=\frac{5\pi}{6}2\pi k}$$

$$f(\frac{\pi}{6})=2\cdot\frac{\pi}{6}+4\cos\frac{\pi}{6}=4.511 \quad\to \boxed{(\frac{\pi}{6},4.511)}$$

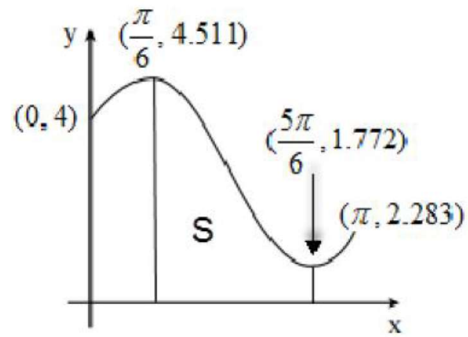
$$f(\frac{\pi}{6})=2\cdot\frac{5\pi}{6}+4\cos\frac{5\pi}{6}=1.772 \quad\to \boxed{(\frac{5\pi}{6},1.772)}$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f(x)$	4		4.511		1.772		2.283
$f'(x)$							
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(0,4)$ **,** $(\frac{5\pi}{6},1.772)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{6},4.511)$**, ,** $(\pi\,,2.283)$ **מקסימום.**

ג. הסקיצה המתאימה, כולל סימון השטח לסעיף ד.



ד.

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2x + 4\cos x - 0)\, dx$$

$$S = (\frac{2x^2}{2} + 4\sin x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$x = \frac{5\pi}{6}: \quad (\frac{5\pi}{6})^2 + 4\sin\frac{5\pi}{6} = 8.854$$

$$x = \frac{\pi}{6}: \quad (\frac{\pi}{6})^2 + 4\sin\frac{\pi}{6} = 2.274$$

$$S = 8.854 - 2.274$$

$$\boxed{S = 6.58}$$

תשובה: גודל השטח 6.58 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{e^{2x}-10e^x}$ **.** $a\neq 0$ **פרמטר.**

(1) בתחום ההגדרה מכנה אינו מתאפס.

$$e^{2x}-10e^x\neq 0$$
$$e^x(e^x-10)\neq 0$$
$$e^x=10 \qquad e^x>0$$
$$\boxed{x\neq \ell n10}$$

תשובה: $x\neq \ell n10$ **.**

(2) $x=\ell n10$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=\ell n10$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=\ell n10$.

ב. הנקודה $(0,-\frac{1}{9})$ **נמצאת על גרף הפונקציה. נציב את שיעוריה בתבנית הפונקציה.**

$$-\frac{1}{9}=\frac{a}{e^{2\cdot 0}-10e^0}$$
$$-\frac{1}{9}=\frac{a}{1-10}$$
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$ **.**

ג. (1) נציב $a=1$ **בתבנית הפונקציה ונקבל:** $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-10e^x}$ **.**

שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות:

$f(5)=4.9\cdot 10^{-5}\rightarrow +0,\quad f(-10)=-2202\rightarrow -\infty$ **- לכן,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{0-(2e^{2x}-10e^x)}{(e^{2x}-10e^x)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-2e^{2x}+10e^x}{(e^{2x}-10e^x)^2}}$$
$$-2e^{2x}+10e^x=0$$
$$-2e^x(e^x-5)=0$$
$$e^x=5 \qquad -2e^x<0$$
$$x=\ell n5 \quad \rightarrow f(\ell n5)=\frac{1}{e^{2\ell n5}-10e^{\ell n5}}=-\frac{1}{25} \quad \rightarrow \boxed{(\ell n5,-\frac{1}{25})}$$

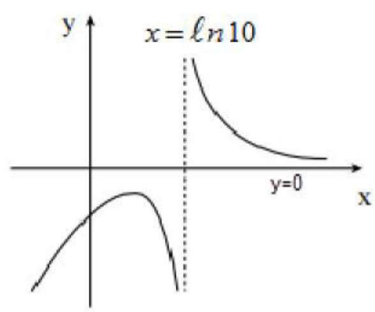
x		$\ell n 5$		$\ell n 10$	
$f'(x)$	+		-		-
מסקנה	↗	Max	↘		↘

תשובה: $(\ell n 5, -\frac{1}{25})$ **מקסימום.**

(2) תשובה: עלייה: $x < \ell n 5$ **, ירידה** $x > \ell n 10$ **או** $\ell n 5 < x < \ell n 10$**.**

(3) תשובה: אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **(מונה הפונקציה חיובי).**

(4) סקיצה של גרף הפונקציה:



ד. $f(x) < 0$ **כאשר, על פי הסקיצה** $x < \ell n 10$.

$f'(x) < 0$ **בירידה של** $f(x)$ **, על פי טבלת העלייה והירידה והסקיצה,**

כאשר $x > \ell n 10$ **או** $\ell n 5 < x < \ell n 10$**.**

התחום המשותף, כאשר $f(x)$ **שלילית ויורדת, הוא** $\ell n 5 < x < \ell n 10$**.**

תשובה: $\ell n 5 < x < \ell n 10$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{\ell n\,(1+x)}{2+2x}$ **.**

הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי, לכן $1+x>0$ **ובהתאם** $x>-1$ **.**

$x=-1$ **מאפס את המכנה.**

תשובה: $x>-1$ **.**

ב. שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות:.

$$f(-0.99999)=-575646\to-\infty,\quad f(100,000)=5.7\cdot10^{-5}\to+0$$

לכן, הישר $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין, והישר** $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **.**

$$0=\frac{\ell n\,(1+x)}{2+2x}$$
$$0=\ell n\,(1+x)$$
$$1+x=1$$
$$x=0\to\boxed{(0,0)}$$

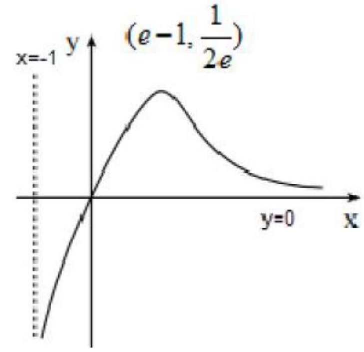
תשובה: נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים היא $(0,0)$ **.**

ד. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ונקבע את סוגה.

$$f(x)=\frac{\ell n\,(1+x)}{2+2x}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{2+2x}{1+x}-2\ell n\,(1+x)}{(2+2x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{2(1+x)}{1+x}-2\ell n\,(1+x)}{(2+2x)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2-2\ell n\,(1+x)}{(2+2x)^2}}$$
$$2-2\ell n\,(1+x)=0$$
$$\ell n\,(1+x)=1$$
$$1+x=e$$
$$x=e-1$$
$$f(e-1)=\frac{\ell n\,(1+e-1)}{2+2(e-1)}=\frac{1}{2e}$$
$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=\dfrac{2-2\ell n\,(1+1)}{+}>0 \\ f'(e)=\dfrac{2-2\ell n\,(1+e)}{+}<0 \end{array}\right\}\boxed{(e-1,\frac{1}{2e})},Min$$

תשובה: $(e-1,\dfrac{1}{2e})$ **מקסימום.**

ה. סקיצה של גרף הפונקציה.



ו. $-f(x)$ **היא הפונקציה הנגדית של** $f(x)$ **.**

תחום ההגדרה נשאר זהה, וכך גם האסימפטוטה האנכית.

במקרה זה גם האסימפטוטה האופקית נשארת זהה, כי היא $y=0$ **.**

ערכי ה- y **מחליפים סימן, ותחומי עלייה וירידה מתהפכים (** $(-f(x))'=-f'(x)$ **)**

ולכן הנקודה $(e-1,-\frac{1}{2e})$ **תהייה נקודת מינימום.**

סקיצה מתאימה: