א. תוכנית האימון של הדר, מתוארת על ידי סדרה חשבונית, $a_1 = 2$ **,** $d = 0.5$**, ו-** $a_n = 22$ **.**

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית.

$$22 = 2 + 0.5(n-1)$$
$$20 = 0.5(n-1) \quad / : 0.5$$
$$40 = n - 1$$
$$\boxed{n = 41}$$

תשובה: הדר מתכננת להתאמן למרוץ במשך 41 **שבועות.**

ב. נמצא, תחילה, את המרחק אותו רצה הדר בשבוע ה- 25 **.**

$$a_{25} = a_1 + 24d$$
$$a_{25} = 2 + 24 \cdot 0.5$$
$$\boxed{a_{25} = 14}$$

כלומר, הדס רצה 14 **ק"מ בשבוע ה-** 25 **.**

לאור הקדמת המרוץ, שינתה הדס את תוכנית האמון, ובשבוע ה- 26 **רצה** 14.8 **ק"מ** $= 14 + 0.8$.

וגם הפעם זו סדרה חשבונית, שבה $b_1 = 14.8$ **,** $d = 0.8$ **, ו-** $b_n = 22$ **.**

$$22 = 14.8 + 0.8(n-1)$$
$$7.2 = 0.8(n-1) \quad / : 0.8$$
$$9 = n - 1$$
$$\boxed{n = 10}$$

מכאן שיש עוד 10 **שבועות אימון על פי התוכנית החדשה, ובסך הכול** 35 **שבועות אימון.**

הדס תקצר את האימונים שלה ב- 6 **שבועות** $= 41 - 35$ **.**

תשובה: הדס תקצר את האימונים שלה ב- 6 **שבועות.**

ג. נחשב, בשני שלבים, את סך כול הקילומטרים אותם תרוץ הדר.

$$S_{1-25} = \frac{25\left[2 \cdot 2 + 0.5 \cdot (25-1)\right]}{2} = 200$$
$$S_{26-35} = \frac{10\left[2 \cdot 14.8 + 0.8 \cdot (10-1)\right]}{2} = 184$$

סך הכול: 384 **קילומטרים** $= 200 + 184$ **.**

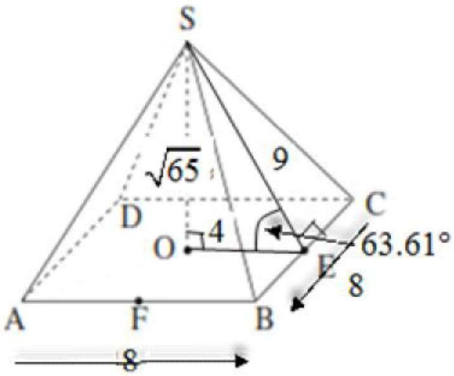
תשובה: הדס תרוץ סך הכול 384 **קילומטרים במהלך האימונים שלה.**

א. (1) בסיס הפירמידה הישרה $SABCD$ **הוא ריבוע שזוויותיו שוות ל-** $90°$.

הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים,

ובמקרה זה, של הריבוע, למפגש האלכסונים.

SE **הוא גובה בפאה** SBC**, שהיא שוות שוקיים, ולכן גם תיכון לבסיסה** BC.



$$S_{\Delta SBC} = \frac{BC \cdot SE}{2}$$

$$36 = \frac{8 \cdot SE}{2}$$

$$\boxed{SE = 9cm}$$

EO **קטע אמצעים ב-** ΔABC**, ולכן** 4 **ס"מ** $EO = \frac{8}{2} =$.

ΔSOE **:**

$$\cos\measuredangle SEO = \frac{EO}{SE} = \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\measuredangle SEO = 63.61°}$$

תשובה: הזווית שבין SE **לבסיס הפירמידה היא בת** $63.61°$.

(2) ΔSOE **על פי משפט פיתגורס:**

$$(SO)^2 = (SE)^2 - (OE)^2$$

$$SO = \sqrt{9^2 - 4^2}$$

$$\boxed{SO = \sqrt{65} \approx 8.062}$$

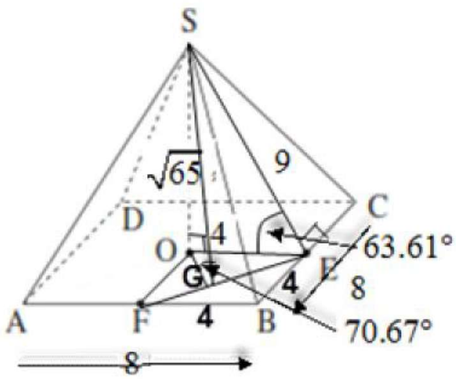
תשובה: אורך גובה הפירמידה הוא $\sqrt{65} \approx 8.062$ **ס"מ.**

ב. (1) על פי משפט פיתגורס ב- ΔFEB :

$$(FE)^2=(FB)^2+(BE)^2$$

$$FE=\sqrt{4^2+4^2}$$

$$\boxed{FE=\sqrt{32}\approx 5.657cm}$$



תשובה: $FE=\sqrt{32}\approx 5.657$ **ס"מ** .

(2) OG **תיכון ליתר ב-** ΔOFE .

$$OG=\frac{FE}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$$

$$\boxed{OG=\sqrt{32}\approx 2.828cm}$$

תשובה: $OG=\sqrt{32}\approx 2.828$ **ס"מ** .

(3) ΔSOG :

$$\tan\sphericalangle SGO=\frac{SO}{OG}=\frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sphericalangle SGO=70.67^\circ}$$

תשובה: הזווית שבין SG **לבין בסיס הפירמידה היא בת** 70.67°.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=1+\cos 3x$ **בתחום** $0\le x\le \frac{2\pi}{3}$.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=1+\cos(3\cdot 0)=2 \quad \to (0,2)$.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$1+\cos 3x=0$$
$$\cos 3x=-1$$
$$3x=\pi+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k$$
$$k=0 \quad x=\frac{\pi}{3} \quad \to (\frac{\pi}{3},0)$$

תשובה: $(0,2)$, $(\frac{\pi}{3},0)$.

ב. נמצא תחילה את נקודת הקצה השנייה, פרט ל- $(0,2)$.

$$f(\frac{2\pi}{3})=1+\cos(3\cdot\frac{2\pi}{3})=2 \quad \to \boxed{(\frac{2\pi}{3},2)}$$

נמצא נקודות קיצון פנימיות.

$$\boxed{f'(x)=-3\sin 3x}$$
$$0=-3\sin 3x$$
$$\sin 3x=0$$
$$3x=\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{3}k$$
$$k=1 \quad x=\frac{\pi}{3} \quad \to (\frac{\pi}{3},0)$$

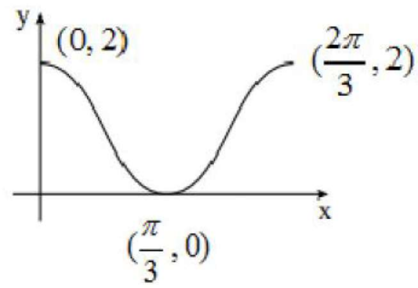
קיצון פנימי יחידי (מתקבלים עוד שני פתרונות קצה).

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	2		0		2
$f'(x)$					
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(0,2)$, $(\frac{2\pi}{3},2)$ **מקסימום** , $(\frac{\pi}{3},0)$ **מינימום.**

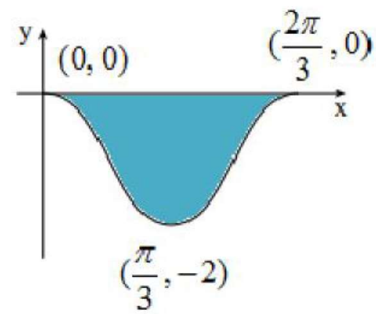
ג. הסקיצה המתאימה:



ד. הפונקציה $g(x) = f(x) - 2$ **היא הזזה כלפי מטה בשתי יחידות של** $f(x)$ **.**

בהתאם נקודות הקיצון הן: $(0,0)$ **,** $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ **מקסימום ,** $(\frac{\pi}{3}, -2)$ **מינימום.**

הסקיצה המתאימה, כולל סימון השטח לסעיף ה:



ה. נחשב את השטח, הצבוע בכחול.

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (0 - (1 + \cos 3x - 2))\, dx$$

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 3x)\, dx$$

$$S = (x - \frac{\sin 3x}{3}) \Big]_0^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}: \quad \frac{2\pi}{3}$$

$$x = 0: \quad 0$$

$$S = \frac{2\pi}{3} - 0$$

$$\boxed{S = \frac{2\pi}{3}}$$

תשובה: גודל השטח $\frac{2\pi}{3}$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2-x+1}$.

(1) נתון: $g(x)=f'(x)$.

$$f(x)=(e^{x^2-x+1})'$$
$$g(x)=(2x-1)e^{x^2-x+1}$$

תשובה: $g(x)=(2x-1)e^{x^2-x+1}$.

(2) תשובה: $g(x)$ **מוגדרת לכל** x **.**

(3) בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $g(0)=(2\cdot 0-1)e^{0^2-0+1}=-e \quad \to (0,-e)$ **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$(2x-1)e^{x^2-x+1}=0$$
$$2x-1=0$$
$$x=0.5 \quad \to (0.5,0)$$

תשובה: $(0,-e)$ **,** $(0.5,0)$**.**

(4) נראה ש- $g(x)$ **עולה לכל** x **.**

$$g(x)=(2x-1)e^{x^2-x+1}$$
$$g'(x)=2e^{x^2-x+1}+(2x-1)(2x-1)e^{x^2-x+1}$$
$$g'(x)=e^{x^2-x+1}(2+(2x-1)^2)$$

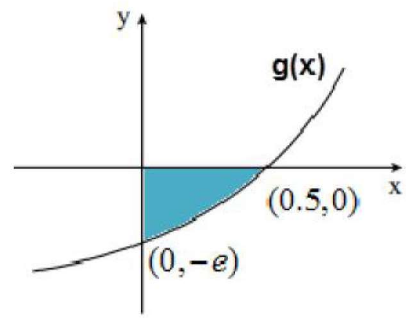
הכופל השמאלי חיובי לכל x **.**

הכופל הימני גדול או שווה ל- 2 **.**

לכן הנגזרת חיובית לכל x $g(x)$ **עולה לכל** x **.**

תשובה: הוכח.

ב. סקיצה מתאימה, כולל סימון השטח לסעיף ג:



ג. נחשב את השטח, הצבוע בכחול.

$$S=\int_{0}^{0.5}(0-g(x))\,dx$$

$$S=\int_{0}^{0.5}(-f'(x))\,dx$$

$$S=(-f(x))\Big]_{0}^{0.5}$$

$$x=0.5:\quad -e^{0.5^2-0.5+1}=-2.117$$

$$x=0:\quad -e^{0.5^2-0.5+1}=e=-2.718$$

$$S=-2.117-(-2.718)$$

$$\boxed{S=0.601}$$

תשובה: גודל השטח 0.601 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{\ell n\, x-a}$ **(** $a>0$ **פרמטר).**

הישר $y=2x$ **חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה** $x=e^3$ **.**

לכן, הנקודה $(e^3,2e^3)$ **נמצאת על גרף הפונקציה.**

$$2e^3=\frac{2e^3}{\ell n\, e^3-a}$$

$$2e^3(3-a)=2e^3 \quad /:2e^3$$

$$3-a=1$$

$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$ **.**

ב. נציב $a=2$ **ונקבל ש-** $f(x)=\frac{2x}{\ell n\, x-2}$ **.**

(1) בתחום ההגדרה, מכנה צריך להיות שונה מאפס

וביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס.

$$\ell n\, x-2\neq 0$$

$$\ell n\, x\neq 2$$

$$x\neq e^2$$

תשובה: $x>0,\ x\neq e^2$**.**

(2) שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות.

$$f(0.0.000001)=-1.26\cdot 10^{-7}\to -0,\quad f(100,000)=21024\to +\infty$$

לכן, גרף הפונקציה יתחיל מנקודה ריקה בראשית הצירים (כלפי מטה),

ומימין אין אסימפטוטה אופקית, כאשר הגרף יסיים בעלייה.

$x=e^2$ **מאפס את המכנה ולא את המונה, ולכן הישר** $x=e^2$ **מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

תשובה: $x=e^2$**.**

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ונקבע את סוגה.

$$f(x)=\frac{2x}{\ell n\,x-2}$$

$$f'(x)=\frac{2(\ell n\,x-2)-\frac{2x}{x}}{(\ell n\,x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ell n\,x-4-2}{(\ell n\,x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n\,x-6}{(\ell n\,x-2)^2}}$$

$$2\ell n\,x-6=0$$

$$\ell n\,x=3$$

$$x=e^3 \quad \to y=\frac{2e^3}{\ell n\,e^3-2}=40.17 \quad \to \boxed{(e^3,40.17)}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(e^{2.5})&=\frac{2\ell n\,e^{2.5}-6}{+}<0 \\ f'(e^4)&=\frac{2\ell n\,e^4-6}{+}>0 \end{aligned}\right\} Min$$

$$f'(e)=\frac{2\ell n\,e-6}{+}<0 \quad \to \searrow$$

תשובה: $(e^3,40.17)$ **מינימום.**

(4) תשובה: עלייה $x>e^3$ **, ירידה** $e^2<x<e^3$ **או** $0<x<e^2$ **.**

(5) $x=0$ **לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** y **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

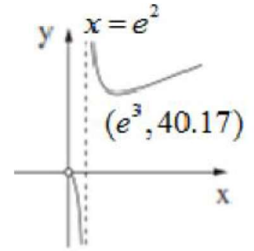
$$0=\frac{2x}{\ell n\,x-2}$$

$$0=x$$

ולכן אין גם נקודת חיתוך עם ציר ה- x**.**

תשובה: לגרף הפונקציה $f(x)$ **אין נקודות חיתוך עם הצירים.**

ג. הסקיצה המתאימה לגרף הפונקציה $f(x)$ היא:



III

נימוקים: נקודה ריקה (חור) בראשית וירידה כלפי מטה.

הגרף תואם את תחום ההגדרה.

שיעורי נקודות מינימום מתאימים.

מיקום אסימפטוטה אנכית מתאים.

שאיפה כלפי מעלה מימין – מתאים.

תחומי עלייה וירידה מתאימים.

אין נקודות חיתוך עם הצירים.

תשובה: גרף III הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$.