א. נתונה סדרה a_n המקיימת את הכלל: $a_{n+1}=a_n+3$, $a_1=0$.

לכן, על פי כלל הנסיגה, הסדרה a_n חשבונית, והפרשה הוא $d=3$.

(1) הסדרה b_n מוגדרת על ידי הכלל: $b_n=a_n+a_{n+1}$.

$$b_n=a_n+a_{n+1}$$
$$b_n=a_n+a_n+3$$
$$\boxed{b_n=2a_n+3}$$

תשובה: הוכחנו.

(2) נראה שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

$$b_{n+1}-b_n=2a_{n+1}+3-(2a_n+3)$$
$$b_{n+1}-b_n=2(a_n+3)+3-2a_n-3$$
$$b_{n+1}-b_n=2a_n+6-2a_n$$
$$\boxed{b_{n+1}-b_n=6}$$

הסדרה חשבונית כי ההפרש בין כל איבר לזה שקודם לו (עבור $n\ge 2$)

הוא קבוע (אינו תלוי ב- n), ולכן: $d=6$.

$$b_1=2a_1+3$$
$$b_1=2\cdot 0+3$$
$$\boxed{b_1=3}$$

תשובה: הוכח, הפרש הסדרה b_n הוא 6, $b_1=3$.

ב. (1) נתון $b_1+b_m=120$.

$$b_1+b_1+d_b(m-1)=120$$
$$6+6(m-1)=120 \quad /:6$$
$$1+m-1=20$$
$$\boxed{m=20}$$

תשובה: $m=20$.

(2) נחשב את הסכום המבוקש, עבור $m=20$, כלומר את $m_{21}+m_{22}+...+m_{40}$ (20 מחוברים).

$$b_{21}=b_1+20d=3+20\cdot 6=123$$

$$S_{21-40}=\frac{20\left[2\cdot 123+6(20-1)\right]}{2}$$
$$S_{21-40}=10\cdot 360$$
$$\boxed{S_{21-40}=3600}$$

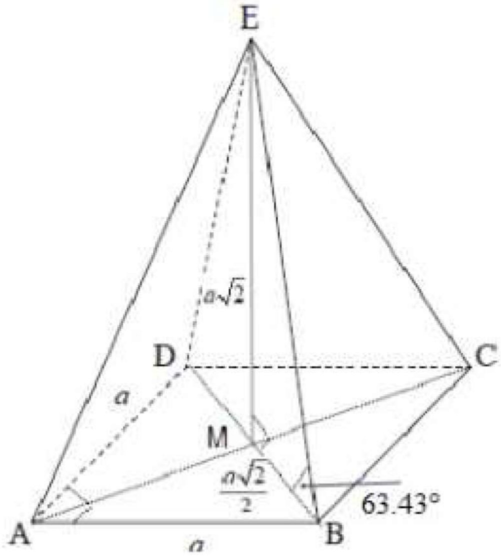
תשובה: הסכום הוא 3600.

א. בסיס הפירמידה הישרה EABCD **הוא ריבוע שזוויותיו שוות ל-** $90°$.

הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים,

ובמקרה זה, של הריבוע, למפגש האלכסונים.

הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה, היא למשל $\sphericalangle SBM$.



ΔABD **על פי משפט פיתגורס:**

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$$

$$(BD)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\boxed{BD = a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

<u>ΔEMB</u>:

$$\tan\sphericalangle EBM = \frac{EM}{BM} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2$$

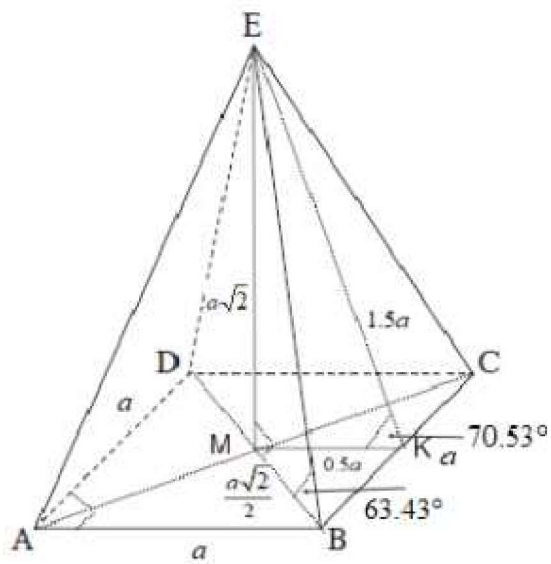
$$\boxed{\sphericalangle EBM = 63.43°}$$

תשובה: הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה היא בת $63.43°$.

ב. EK **הוא גובה בפאה** EBC**, שהיא שוות שוקיים, ולכן גם תיכון לבסיסה** BC.

MK **קטע אמצעים ב-** ΔABC**, ולכן** $MK = 0.5a$.

הזווית שבין EK **ובין בסיס הפירמידה, היא למשל** $\sphericalangle EKM$.



<u>ΔEMK</u>:

$$\tan\sphericalangle EKM = \frac{EM}{MK} = \frac{a\sqrt{2}}{0.5a} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle EKM = 70.53°}$$

תשובה: הזווית שבין EK **ובין בסיס הפירמידה היא בת** $70.53°$.

ג. נתון כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא 36.75 **סמ"ר.**

בסיס הפירמידה ריבוע, ולכן הפאות חופפות, ושטח כל אחת הוא 9.1875 **סמ"ר** $= \frac{36.75}{4}$ **.**

$$(EK)^2 = (EM)^2 + (MK)^2$$

$$(EK)^2 = (a\sqrt{2})^2 + (0.5a)^2 = 2.25a^2$$

$$\boxed{EK = 1.5a}$$

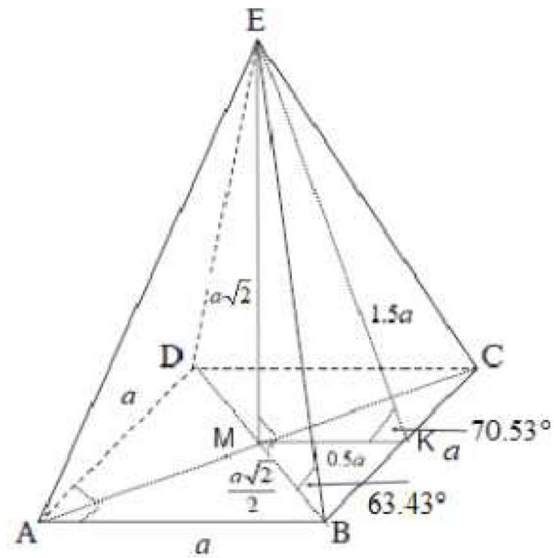
$$S_{\Delta EBC} = \frac{BC \cdot EK}{2}$$

$$9.1875 = \frac{a \cdot 1.5a}{2}$$

$$12.25 = a^2$$

$$\boxed{a = 3.5cm}$$

תשובה: $a =$ 3.5 **ס"מ .**



א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=2\sin 2x$ **של** $f(x)$, **והתחום** $0\le x\le \pi$.

$$0=2\sin 2x$$
$$\sin 2x=0=\sin 0$$
$$2x=2\pi k \qquad 2x=\pi+2\pi k$$
$$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=0,\pi \qquad x=\frac{\pi}{2}$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת סימני הנגזרת:

$$f'(\frac{\pi}{4})=2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=2>0 \quad , \quad f'(\frac{3\pi}{4})=2\sin(2\cdot\frac{3\pi}{4})=-2<0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+		-	
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $x=\pi$ **מינימום ,** $x=\frac{\pi}{2}$ **מקסימום ,** $x=0$ **מינימום.**

ב. נמצא את $f(x)$, **על ידי אינטגרל לפונקציית הנגזרת, והנקודה** $(0,-2)$.

$$f(x)=\int 2\sin 2x\,dx$$
$$f(x)=\frac{-2\cos 2x}{2}+c$$
$$-2=-\cos(2\cdot 0)+c$$
$$-1=c$$
$$\boxed{f(x)=-\cos 2x-1}$$

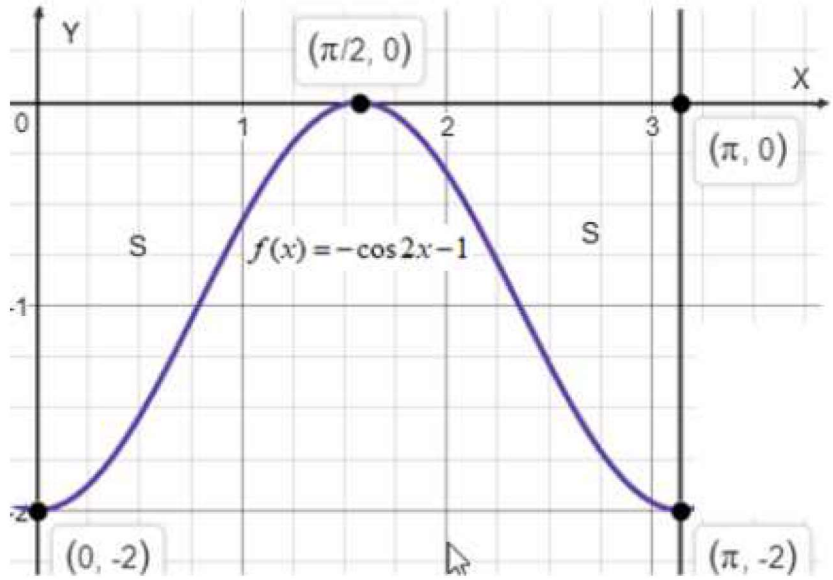
תשובה: $f(x)=-\cos 2x-1$.

ג. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$0=-\cos 2x-1$$
$$\cos 2x=-1=\cos\pi$$
$$2x=\pi+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$k=0 \qquad x=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}$$

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0)$.

ד. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח, עבור סעיף ה):



ה. נחשב את השטח, המסומן ב- S,

כאשר בשני חלקיו, הפונקציה העליונה היא $y=0$ **, והפונקציה התחתונה היא** $f(x)=-\cos 2x-1$ **.**

$$S=\int_0^{\pi}(0-(-\cos 2x-1))\,dx$$

$$S=\int_0^{\pi}(\cos 2x+1))\,dx$$

$$S=\left(\frac{\sin 2x}{2}+x\right)\Big]_0^{\pi}$$

$$x=\pi:\quad \frac{\sin 2\pi}{2}+\pi=\pi$$

$$x=0:\quad \frac{\sin 2\cdot 0}{2}+0=0$$

$$S=\pi-0$$

$$\boxed{S=\pi}$$

תשובה: גודל השטח π **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=ae^{x}-9e^{-x}$ **(** a **הוא פרמטר).**

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x **.**

ב. שיפוע המשיק לגרף של $f(x)=ae^{x}-9e^{-x}$ **, בנקודה שבה** $x=\ell n 3$ **הוא** 6**, כלומר** $f'(\ell n 3)=6$ **.**

$$f'(x)=ae^{x}+9\cdot e^{-x}$$

$$6=ae^{\ell n 3}+9\cdot e^{-\ell n 3}$$

$$6=a\cdot 3+9\cdot\frac{1}{3}$$

$$3=3a$$

$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$**.**

ג. נציב $a=1$ **, ונקבל** $f(x)=e^{x}-9e^{-x}$ **.**

(1) בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=e^{0}-9e^{-0}=-8=\ \rightarrow\boxed{(0,-8)}$ **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$e^{x}-9e^{-x}=0$$

$$e^{x}=9e^{-x}$$

$$e^{x}=\frac{9}{e^{x}}$$

$$(e^{x})^{2}=9$$

$$e^{x}=3\ \rightarrow\boxed{(\ell n 3,0)}$$

$$\cancel{e^{x}=-3}\ \leftarrow e^{x}>0$$

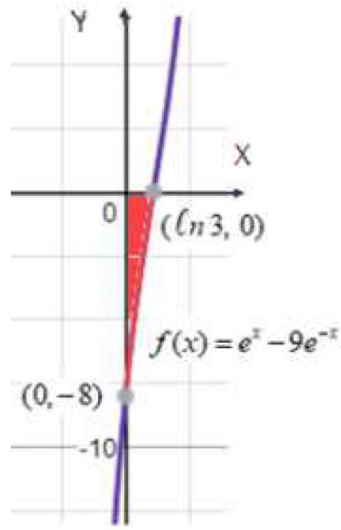
תשובה: $(0,-8)$ **,** $(\ell n 3,0)$ **.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ **.**

$f'(x)=e^{x}+9e^{-x}>0$ **.**

תשובה: עלייה כל x**, ירידה אף** x**.**

(3) הסקיצה המתאימה של $f(x)$, כולל סימון השטח עבור סעיף ד:



ד. נחשב את השטח, הצבוע באדום.

$$S = \int_0^{\ell n3} (0 - (e^x - 9e^{-x}))\, dx$$

$$S = \int_0^{\ell n3} (-e^x + 9e^{-x})\, dx$$

$$S = (-e^x - 9e^{-x}) \Big]_0^{\ell n3}$$

$$x = \ell n3: \quad -e^{\ell n3} - 9e^{-\ell n3} = -6$$

$$x = 0: \quad -e^0 - 9e^{-0} = -10$$

$$S = -6 - (-10)$$

$$\boxed{S = 4}$$

תשובה: גודל השטח 4 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x}{\ell n(x)-2}$.

בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x>0$.

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן $\ell n(x)-2\neq 0 \quad \to \ell n(x)\neq 2 \quad \to x\neq e^2$.

תשובה: $x>0\,,\,x\neq e^2$.

ב. (1) $x=0$ **לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** y.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$0=\frac{2x}{\ell n(x)-2}$$

$$0=2x$$

$$\cancel{x=0}$$

תשובה: גרף הפונקציה $f(x)$ **אינו חותך את הצירים.**

(2) $x=e^2$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=e^2$ **מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות.

$$f(0.001)=-2\cdot 10^{-4}\to -0,\quad f(1000)=407\to +\infty$$

ניתן להציב מספרים קרובים יותר לאפס ולמספרים הגדולים, ולהבין את המשמעות.

כלומר, כאשר $x=0$ **יש בגרף נקודה ריקה** $(0,0)$**, והישר** $x=0$ **אינו אסימפטוטה אנכית.**

מימין אין אסימפטוטה אופקית, כאשר הגרף יסתיים בעלייה.

תשובה: $x=e^2$.

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.

$$f(x)=\frac{2x}{\ell n(x)-2}$$

$$f'(x)=\frac{2(\ell n(x)-2)-\frac{2x}{x}}{(\ell n(x)-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ell n(x)-4-2}{(\ell n(x)-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n(x)-6}{(\ell n(x)-2)^2}}$$

$$0=2\ell n(x)-6$$

$$2\ell n(x)=6$$

$$\ell n(x)=3$$

$$x=e^3 \quad \rightarrow y=\frac{2e^3}{\ell n(e^3)-2}=2e^3 \quad \rightarrow \boxed{(e^3,2e^3)}$$

הנגזרת חיובית, בתחום ההגדרה.

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת סימני הנגזרת:

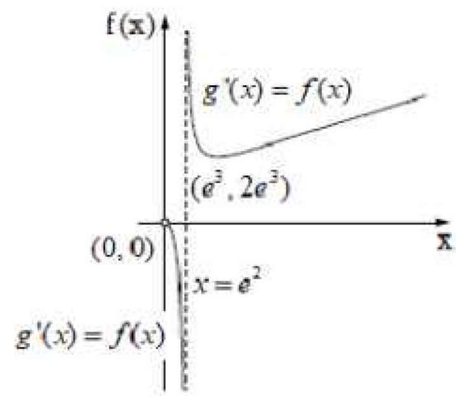
$$f'(e)=\frac{2\ell n\,(e)-6}{+}<0 \quad , \quad f'(3)=\frac{2\ell n\,(3)-6}{+}<0 \quad , \quad f'(e^4)=\frac{2\ell n\,(e^4)-6}{+}>0$$

x	0		e^2		e^3	
$f'(x)$		-		-		+
מסקנה		↘		↘	Min	↗

תשובה: $(e^3, 2e^3)$ **מינימום .**

(4) תשובה: עלייה $x \ge e^3$ **, ירידה** $e^2 < x \le e^3$ **, או** $0 < x < e^2$**.**

(5) $f(0.1)=-0.046$ **, ובהתאם הסקיצה המתאימה של** $f(x)=\dfrac{2x}{\ell n\,(x)-2}$ **, כולל סימון עבור סעיף ג.**



ג. נתונה פונקציה $g(x)$ **, המקיימת** $g'(x)=f(x)$ **.**

$g(x)$ **עולה, כאשר הנגזרת שלה** $g'(x)>0$ **, ועל פי הסקיצה – בתחום החיוביות של** $f(x)$ **, שהוא** $x>e^2$ **.**

תשובה: תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$ **הוא** $x>e^2$**.**