א. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין-סופיות.

כיוון שנתון סכום של כל אחת מהן, וכל אחת מהן אין-סופית, הרי שמדובר בסדרות מתכנסות,

ולכן $-1<q<1$ **, ונוסחת הסכום של אין-סוף איברי הסדרה היא** $S=\frac{a_1}{1-q}$ **.**

נרכז בטבלה את הנתונים שלהן (מומלץ תמיד), ונעדכן אותה גם במהלך התרגיל.

b_n	a_n	
$b_1=a_1$	a_1	A_1
$3q=3\cdot\frac{1}{15}=0.2$	$q=\frac{1}{15}$	Q
∞	∞	N
$T=\frac{a_1}{1-3q}$	$S=\frac{a_1}{1-q}$	S

נתון $\frac{S}{T}=\frac{6}{7}$ **.**

נציב על ידי חילוק בהופכי

$$\frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{1-3q}{a_1}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{1-3q}{1-q}=\frac{6}{7}$$

$$7-21q=6-6q$$

$$1=15q$$

$$\boxed{q=\frac{1}{15}}$$

תשובה: $q=\frac{1}{15}$ **.**

ב. נתון $a_4 = 5$.

$$a_1 q^3 = 5$$

$$a_1 \left(\frac{1}{15}\right)^3 = 5 \quad / : \left(\frac{1}{15}\right)^3$$

$$\boxed{a_1 = 16875}$$

ולכן גם $\boxed{b_1 = 16875}$

$$b_4 = b_1 \cdot q_b^3$$

$$b_4 = 16875 \cdot 0.2^3$$

$$\boxed{b_4 = 135}$$

דרך חלופית

$$b_4 = b_1 \cdot q_b^3$$

$$b_4 = a_1 \cdot (3q)^3$$

$$b_4 = 27 a_1 q^3$$

$$b_4 = 27 a_4$$

$$a_4 = 27 \cdot 5$$

$$\boxed{b_4 = 135}$$

תשובה: $b_4 = 135$

א. נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$**, שאורך מקצועותיה השווים הוא** a**.**

לקובייה שש פאות, שהן ריבועים חופפים.

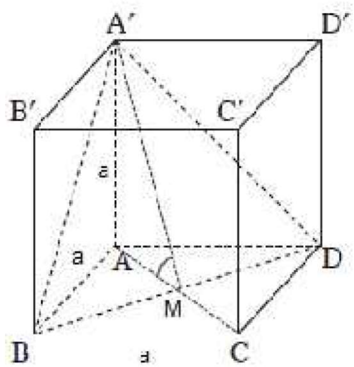
כל אחת, משלוש הצלעות של $\Delta A'BD$**, היא אלכסון של אחת מהפאות החופפות,**

ולכן $\Delta A'BD$ **הוא משולש שווה צלעות.**

תשובה: הוכחנו.

ב. $A'M$ **הוא גובה ב-** $\Delta A'BD$**, ולכן הוא גם תיכון לצלע, לאלכסון הבסיס** BD**.**

$\sphericalangle AMA'$ **היא הזווית שבין** $A'M$ **למישור** $ABCD$**, כאשר** AM **הוא ההיטל של** $A'M$ **למישור.**



ΔABC **על פי משפט פיתגורס:**

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(AC)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$

AM **הוא גם חצי מאלכסון הריבוע:**

$$\boxed{AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

: <u>$\Delta AMA'$</u>

$$\tan \sphericalangle AMA' = \frac{AA'}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle AMA' = 54.74°}$$

תשובה: גודל הזווית שבין $A'M$ **ובין הפאה** $ABCD$ **הוא** $54.74°$**.**

ג. נתון: $S_{\Delta A'BD} = 8\sqrt{3}$.

(1) נחשב את a .

$$S_{\Delta A'BD} = 8\sqrt{3}$$

$$\frac{(a\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$\frac{2a^2 \sin 60^\circ}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$a^2 = 16$$

$$\boxed{a = 4} \quad \leftarrow a > 0$$

תשובה: $a = 4$.

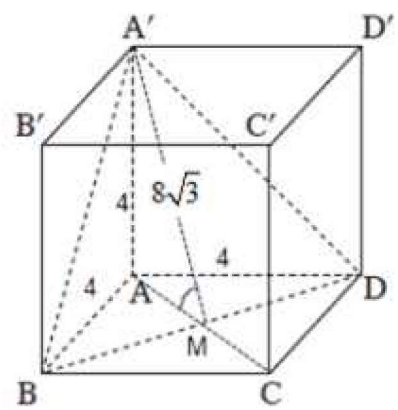
(2) $AA'BD$ **היא פירמידה ישרה, כאשר** $AA' = AD = AB = 4$ **, ו-** A **הוא קדקוד זווית הראש.**

שלוש הפאות הצדדיות, החופפות, מונחות על פאות הקוביה, ושטח כל אחת מהן הוא $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

בסיס הפירמידה הוא $\Delta A'BD$**, ששטחו ידוע, והוא** $8\sqrt{3}$.

שטח הפנים של הפירמידה הוא: $3 \cdot 8 + 8\sqrt{3} = 8(3+\sqrt{3}) \approx 37.86$.

תשובה: שטח הפנים של הפירמידה $AA'BD$ **הוא:** $8(3+\sqrt{3}) \approx 37.86$.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x+\cos 2x$, **המוגדרת בתחום** $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ **.**

נקודות קצה: $(0,1)$ **,** $(\frac{\pi}{2},1)$**. (תמיד מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)**

$$\boxed{f'(x)=2\cos x-2\sin 2x}$$
$$0=2\cos x-2\sin 2x$$
$$0=2\cos x-4\sin x\cos x$$
$$0=2\cos x\,(1-2\sin x)$$
$$\cos x=0=\cos\frac{\pi}{2} \qquad \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

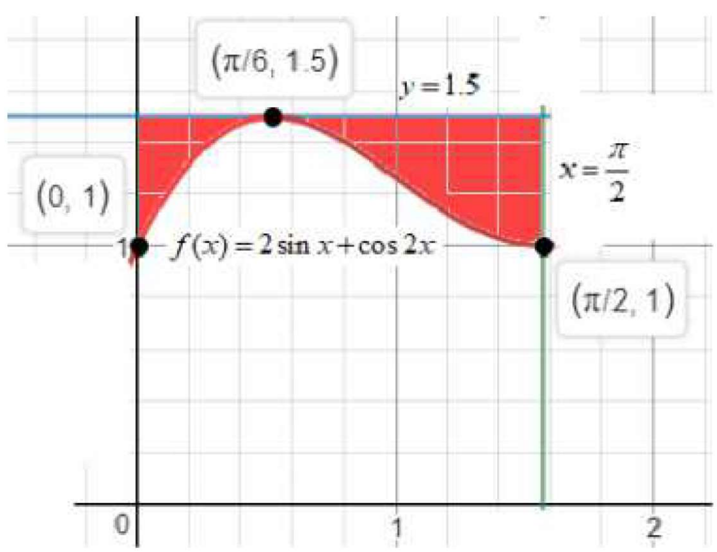
$x=\frac{\pi}{6}$ **הוא הפתרון הפנימי היחידי.** $\boxed{(\frac{\pi}{6},1.5)} \leftarrow f(\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(2\cdot\frac{\pi}{6})=1.5$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	1		1.5		1
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(\frac{\pi}{2},1)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{6},1.5)$ **מקסימום ,** $(0,1)$ **מינימום.**

ב. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח, עבור סעיף ג):



ג. (1) משוואת המשיק, בנקודת מקסימום פנימי, היא של פונקציה קבועה $y=1.5$ **.**

תשובה: $k=1.5$ **.**

(2) נחשב את השטח, הצבוע באדום, כאשר בשני חלקיו, הפונקציה העליונה היא $y=1.5$ **,**

והפונקציה התחתונה היא $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ **.**

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1.5-(2\sin x+\cos 2x))\,dx$$

$$S=\int_0^{\pi}(1.5-2\sin x-\cos 2x)\,dx$$

$$S=(1.5x+2\cos x-\frac{\sin 2x}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$x=\frac{\pi}{2}:\quad 1.5\cdot\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(2\cdot\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{3}{4}\pi$$

$$x=0:\quad 1.5\cdot 0+2\cos 0-\frac{\sin(2\cdot 0)}{2}=2$$

$$\boxed{S=\frac{3}{4}\pi-2\approx 0.356}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{3}{4}\pi-2\approx 0.356$ **יח"ר.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a-e^x}{e^{2x}}$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר).**

מכנה הפונקציה חיובי לכל x.

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $\boxed{(0,a-1)} \leftarrow a-1 = \frac{a-e^0}{e^{2\cdot 0}} = f(0)$ **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\frac{a-e^x}{e^{2x}}=0$$

$$a-e^x=0$$

$$a=e^x \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\, a,\, 0)}$$

תשובה: $(0,a-1)$ **,** $(\ell n\, a,\, 0)$**.**

ב. נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ **עובר בראשית הצירים, ולכן:** $f(0)=0$ **.**

$$\ell n\, a=0$$

$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$**.**

ג. נציב $a=1$ **, ונקבל** $f(x)=\frac{1-e^x}{e^{2x}}$ **.**

כאשר $x\to+\infty$ **, למשל** $f(10)=\frac{1-e^{10}}{e^{2\cdot 10}}=-4.5\cdot 10^{-5}\to 0^-$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\to-\infty$ **, למשל** $f(-10)=\frac{1-e^{-5}}{e^{2\cdot(-5)}}=21{,}878\to+\infty$ **. ואין אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

(1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{-e^x e^{2x}-2e^{2x}(1-e^x)}{(e^{2x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}\left[-e^x-2(1-e^x)\right]}{(e^{2x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^x-2+2e^x}{e^{2x}}$$

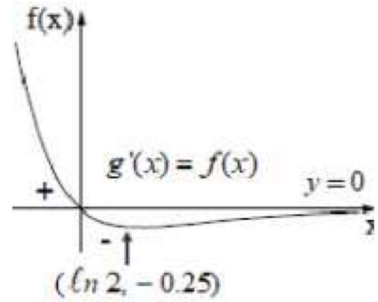
$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x-2}{e^{2x}}}$$

$$e^x=2 \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\, 2,\, -0.25)}$$

על פי ערכי הפונקציה מימין $(5,\,-4.5\cdot 10^{-5})$ **ומשמאל** $(0,0)$ **מתקבל ש-** $(\ell n\, 2,\, -0.25)$ **מינימום.**

תשובה: $(\ell n\, 2,\, -0.25)$ **מינימום .**

(2) סרטוט של גרף הפונקציה.



ד. הפונקציה $g(x)$, מקיימת $g'(x) = f(x)$.

בנקודה, שבה $x = 0$, עוברת $g'(x)$ מחיובית לשליליות, ובהתאם $g(x)$ עוברת מעלייה לירידה.

תשובה: $x = 0$, מקסימום.

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\dfrac{\ell n\, x^2}{x^2}}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x^2 \neq 0 \quad \to x \neq 0$.

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן $x \neq 0$.

תשובה: $x \neq 0$.

(2) כאשר $x \to 0$ **, למשל** $f(\pm 0.01) = -92103 \to -\infty$ **, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

(כאשר $x \to \infty$ **, למשל** $f(\pm 1000) = 1.3 \cdot 810^{-5} \to 0$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין ולשמאל.)**

תשובה: $x=0$.

(3) $x=0$ **לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** y.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$\ell n\, x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\boxed{(1,0)\,,\,(-1,0)}$$

תשובה: $(1,0)$ **,** $(-1,0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f\,'(x) = \frac{\dfrac{2x \cdot x^2}{x^2} - 2x\ell n\, x^2}{x^4}$$

$$f\,'(x) = \frac{2x - 2x\ell n\, x^2}{x^4}$$

$$\boxed{f\,'(x) = \frac{2x(1-\ell n\, x^2)}{x^4}}$$

$$1 - \ell n\, x^2 = 0 \qquad \cancel{x=0}$$

$$\ell n\, x^2 = 1$$

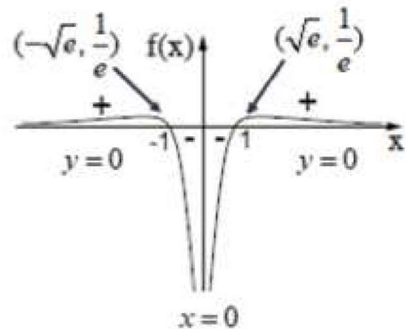
$$x = \pm\sqrt{e}$$

$$f(\pm\sqrt{e}) = \frac{\ell n\,(\pm\sqrt{e})^2}{(\pm\sqrt{e})^2} = \frac{\ell n\, e}{e} = \frac{1}{e} \quad \to \boxed{(\sqrt{e}, \frac{1}{e})} \quad \boxed{(-\sqrt{e}, \frac{1}{e})}$$

על פי ערכי הפונקציה, שמצאנו בסעיף א, שתי נקודות אלו הן נקודות מקסימום.

תשובה: $(\sqrt{e}, \frac{1}{e})$ **מקסימום ,** $(-\sqrt{e}, \frac{1}{e})$ **מקסימום .**

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\dfrac{\ell n\, x^2}{x^2}$, כולל סימון עבור תת-סעיף א(6).

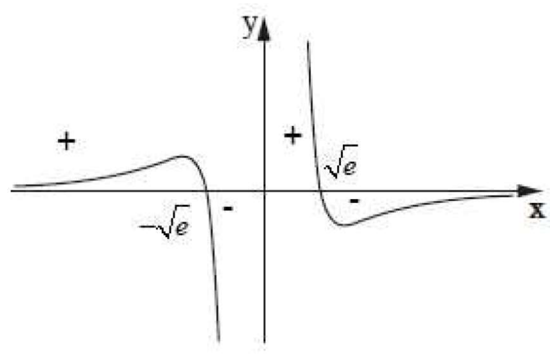


(6) תשובה: חיוביות $x>1$, או $x<-1$. שליליות $0<x<1$, או $-1<x<0$ (אפשר גם $-1<x<-1, x\neq 0$).

ב. רצוי לתת לפחות שלושה נימוקים לגרף המתאים.

- **בנקודה שבה $x=\sqrt{e}$ עוברת הפונקציה מעלייה לירידה, וגרף הנגזרת מחיובי לשלילי.**
- **בנקודה שבה $x=-\sqrt{e}$ עוברת הפונקציה מעלייה לירידה, וגרף הנגזרת מחיובי לשלילי.**
- **$f(x)=\dfrac{\ell n\, x^2}{x^2}$ פונקציה זוגית, סימטרית לציר ה- y .**

$f'(x)=\dfrac{2x(1-\ell n\, x^2)}{x^4}$ פונקציה אי-זוגית, סימטרית לראשית הצירים.



IV

תשובה: גרף IV הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.