א. נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 , וההפרש שלה הוא $d = 4$.

נתונה סדרה המוגדרת על ידי הכלל: $b_n = a_n + 8n$.

נראה שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

$$
\begin{aligned}
&b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 8(n+1) - (a_n + 8n) \\
&b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 8n + 8 - a_n - 8n \\
&b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + 8 \\
&b_{n+1} - b_n = 4 + 8 \quad \leftarrow a_{n+1} - a_n = d_a = 4 \\
&\boxed{b_{n+1} - b_n = 12}
\end{aligned}
$$

הסדרה חשבונית כי ההפרש בין כל איבר לזה שקודם לו (עבור $n \geq 2$)

הוא קבוע (אינו תלוי ב- n), ולכן: $d_b = 12$.

תשובה: הוכח ש- b_n היא סדרה חשבונית, והפרשה הוא 12.

ב. נתונה סדרה שלישית, המוגדרת על ידי הכלל: $c_n = a_n + b_n$.

נראה שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

$$
\begin{aligned}
&c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + b_{n+1} - (a_n + b_n) \\
&c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n \\
&c_{n+1} - c_n = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n \\
&c_{n+1} - c_n = 4 + 12 \quad \leftarrow a_{n+1} - a_n = 4 \, , b_{n+1} - b_n = 12 \\
&\boxed{c_{n+1} - c_n = 16}
\end{aligned}
$$

הסדרה חשבונית כי ההפרש בין כל איבר לזה שקודם לו (עבור $n \geq 2$)

הוא קבוע (אינו תלוי ב- n), ולכן: $d_c = 16$.

תשובה: הוכח ש- c_n היא סדרה חשבונית.

ג. נתון $a_1 = 0.5$**.**

(1) נמצא את c_1**.**

$$b_n = a_n + 8n$$
$$b_1 = a_1 + 8 \cdot 1$$
$$b_1 = 0.5 + 8$$
$$\boxed{b_1 = 8.5}$$
$$c_n = a_n + b_n$$
$$c_1 = a_1 + b_1$$
$$c_1 = 0.5 + 8.5$$
$$\boxed{c_1 = 9}$$

תשובה: $c_1 = 9$**.**

(2) נמצא את סכום 20 **האיברים הראשונים בסדרה** c_n**, שבה האיבר הראשון הוא** 9 **וההפרש הוא** 16.

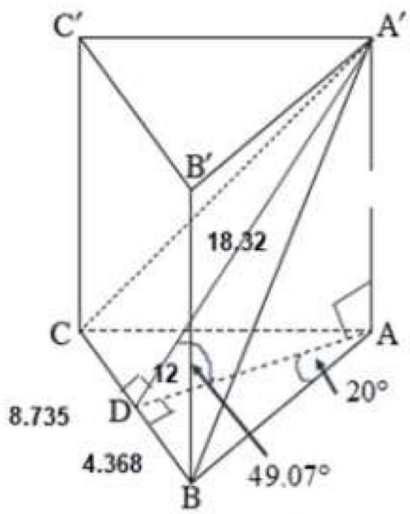
$$S_{20}^{c} = \frac{20 \cdot \left[2 \cdot 9 + 16 \cdot (20-1)\right]}{2}$$
$$\boxed{S_{20}^{c} = 3220}$$

תשובה: סכום 20 **האיברים הראשונים בסדרה** c_n a_n **הוא** $3,220$**.**

א. בסיס המנסרה ABC **הוא משולש שווה שוקיים,** $AC = AB$ **,**

שבו התיכון לבסיס AD **הוא גם גובה לבסיס וגם חוצה זווית הראש.**

בהתאם: $\sphericalangle DAB = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$ **,** $CD = DB$ **,** $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ **.**



$\underline{\Delta ADB}$

$$\tan 20^\circ = \frac{DB}{AD}$$

$$12 \tan 20^\circ = DB$$

$$\boxed{DB = 4.368}$$

$$CB = 2 \cdot 4.368$$

$$\boxed{CB = 8.735}$$

תשובה: $CB = 8.735$ **.**

ב. $AC = AB$ **, ולכן שתי הפאות המלבניות** $ABB'A'$ **ו-** $ACC'A'$ **חופפות זו לזו,**

ולכן אלכסוניהן שווים זה לזה, כלומר $BA' = CA'$ **ו-** $\Delta CA'B$ **שווה שוקיים.**

תשובה: הוכחנו ש- $\Delta CA'B$ **שווה שוקיים.**

ג. $S_{CA'B} = 80$ **.** $\Delta CA'B$ **שווה שוקיים, ולכן התיכון לבסיס (** DA' **) הוא גם גובה.**

$$S_{CA'B} = 80$$

$$\frac{CB \cdot DA'}{2} = 80$$

$$DA' = \frac{80 \cdot 2}{8.735}$$

$$\boxed{DA' = 18.32}$$

הזווית שבין הקטע DA' **לבסיס המנסרה** ABC **היא** $\sphericalangle A'DA$ **, שבין** DA' **, להיטל שלו** AD **לבסיס.**

$\underline{\Delta A'DA}$

$$\cos \sphericalangle A'DA = \frac{AD}{DA'} = \frac{12}{18.32}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'DA = 49.07^\circ}$$

תשובה: גודל הזווית הוא 49.07° **.**

ד. נחשב את גובה המנסרה.

$\underline{\Delta A'DA}$

$12^2 + (AA')^2 = 18.32^2$

$\boxed{AA' = 13.84}$

נחשב את נפח המנסרה, מכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה.

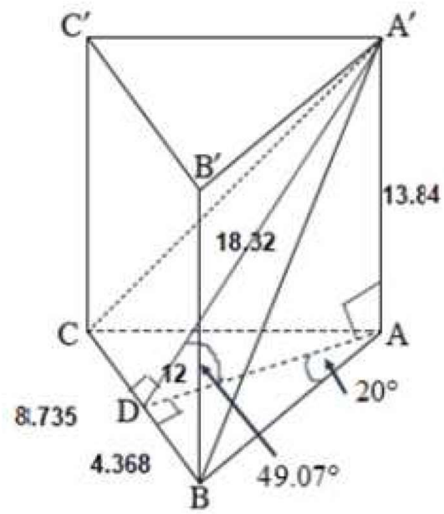
$V = S_{ABC} \cdot AA'$

$V = \frac{CB \cdot AD}{2} \cdot AA'$

$V = \frac{8.735 \cdot 12}{2} \cdot 13.84$

$\boxed{V = 725.5}$

תשובה: נפח המנסרה $ABCA'B'C'$ **הוא** 725.5**.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)$, **המוגדרת בתחום** $0 \le x \le \pi$ **.**

נתון גם: $f'(x) = -3\sin 2x$ **,** $f(x) = 0.75$ **.**

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int -3\sin 2x\,dx$$

$$f(x) = \frac{3\cos 2x}{2} + c$$

$$0.75 = 1.5\cos(2 \cdot 0) + c \quad \leftarrow f(0) = 0.75$$

$$0.75 = 1.5 + c$$

$$c = -0.75$$

$$\boxed{f(x) = 1.5\cos 2x - 0.75}$$

תשובה: $f(x) = 1.5\cos 2x - 0.75$ **.**

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y = 0$ **.**

$$1.5\cos 2x - 0.75 = 0$$

$$1.5\cos 2x = 0.75 \quad /:1.5$$

$$\cos 2x = 0.5 = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \qquad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \leftarrow \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k \qquad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$k = 0: \boxed{(\frac{\pi}{6}, 0)} \qquad k = 1: \boxed{(\frac{5\pi}{6}, 0)}$$

תשובה: $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ **,** $(\frac{\pi}{6}, 0)$**.**

ג. נקודות קצה: $(\pi, 0.75)$ **,** $(0,0)$**. (מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)**

$$\boxed{f'(x) = -3\sin 2x}$$

$$0 = \sin 2x = \sin 0$$

$$2x = 2\pi k \qquad 2x = \pi + 2\pi k$$

$$x = \pi k \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$k = 0: \boxed{(0, 0.75)} \qquad k = 0: \boxed{(\frac{\pi}{2}, -2.25)}$$

$$k = 1: \boxed{(\pi, 0.75)}$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה.

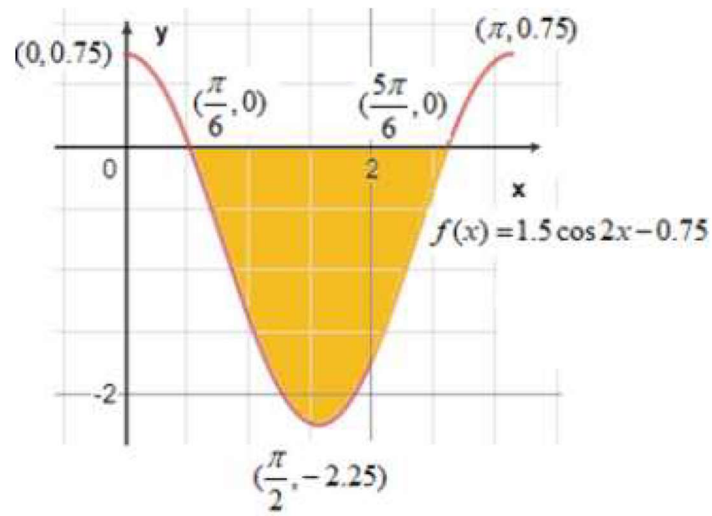
(סימני הנגזרת הוספו, כי לעיתים נדרש לצייר את גרף הנגזרת.)

(הערה – גם בנקודות הקצה התאפסה הנגזרת, והגרף "ימחיש" שבתחום רחב יותר הן תהיינה קיצון פנימי.)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0.75		−2.25		0.75
$f'(x)$		-		+	
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(\pi, 0.75)$ **מקסימום,** $(\frac{\pi}{2}, -2.25)$ **מינימום,** $(0, 0.75)$ **מקסימום .**

ד. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח עבור סעיף ה).



ה. נחשב את השטח, המבוקש.

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[0 - (1.5\cos 2x - 0.75)\right] dx$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (-1.5\cos 2x + 0.75)\, dx$$

$$S = \frac{-1.5\sin 2x}{2} + 0.75x \Big]_0^{\pi}$$

$$x = \frac{5\pi}{6}: \quad 2.613$$

$$x = \frac{\pi}{6}: \quad -0.257$$

$$S = 2.613 - (-0.257)$$

$$\boxed{S = 2.87}$$

תשובה: גודל השטח הוא 2.87 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=-3e^{x}(2e^{x}-4)}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x **.**

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **.** $\boxed{(0,6)} \leftarrow \quad f(0)=3e^{0}(2e^{0}-4)=6$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$**.**

$$0=-3e^{x}(2e^{x}-4)$$
$$e^{x}>0$$
$$2e^{x}-4=0$$
$$2e^{x}=4$$
$$e^{x}=2$$
$$x=\ell n\,2 \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\,2,0)}$$

תשובה: $(0,6)$ **,** $(\ell n\,2,0)$**.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

כדי להימנע מנגזרת של מכפלה, נפתח את הסוגריים לפני שנגזור.

$$f(x)=-3e^{x}(2e^{x}-4)$$
$$\boxed{f(x)=-6e^{2x}+12e^{x}}$$
$$\boxed{f'(x)=-12e^{2x}+12e^{x}}$$
$$0=-12e^{2x}+12e^{x}$$
$$0=12e^{x}(-e^{x}+1)$$
$$e^{x}>0$$
$$-e^{x}+1=0 \quad \rightarrow e^{x}=1= \quad \rightarrow x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,\ 6)}$$
$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)=2.79>0 \\ f(1)=-56<0 \end{array}\right\} \boxed{(0,\ 6),\quad \max}$$

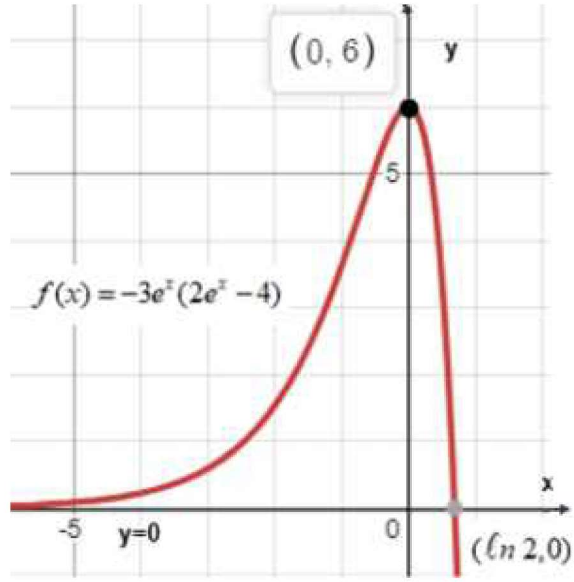
תשובה: $(0,\ 6)$ **מקסימום .**

ד. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=-3e^x(2e^x-4)$.

שתי הצבות מומלצות לפני הסקיצה:

$f(10)=-2910726855 \quad \to -\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

$f(-10)=5.44\cdot 10^{-4} \quad \to 0^+$ **, ו- $y=0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.**



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$, שהיא הקטנה פי 2 של ערכי $f(x)$, ואז שיקוף סביב ציר x .

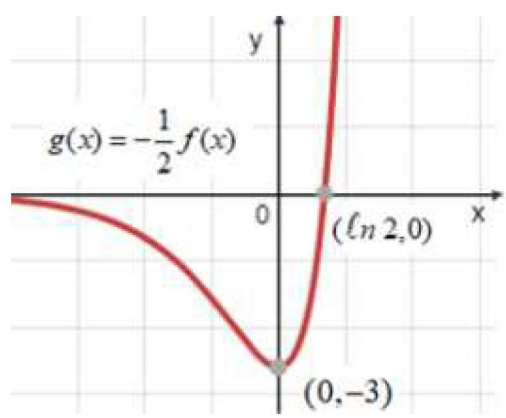
(1) הישר $f'(x)=-\frac{1}{2}f'(x)$ ולכן תחומי עלייה וירידה מתהפכים, ומשתנה סוג הקיצון.

מכאן ש- $x=0$ מינימום, כאשר $g(0)=-\frac{1}{2}f(0)=-\frac{1}{2}\cdot 6=3 \quad \to \boxed{(0,-3),\min}$.

תשובה: $(0,-3)$, מינימום.

(2) שיקולים נוספים לסרטוט:

- $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל, רק שמגיעים אליה מלמטה, מהרביע השלישי.**
- $(\ell n\,2,0)$ **נשארת נקודת החיתוך עם ציר ה- x .**



א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\ell n(-x^2+ax)}$ **, המוגדרת בתחום** $0<x<a$ **, כאשר** $a>0$ **פרמטר.**

<u>ידוע</u> כי לפונקציה יש נקודת קיצון (לכן, לא נדרש להוכיח את סוגה, אלא רק למצוא מתי $f'(x)=0$ **) .**

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x+a}{-x^2+ax}}$$

$$0=-2x+a$$

$$2x=a$$

$$\boxed{x=\frac{a}{2}}$$

כיוון שנמצא רק פתרון אחד, אז הוא שיעור ה- x **של נקודת הקיצון.**

תשובה: $x=\frac{a}{2}$ **הוא שיעור ה-** x **של נקודת הקיצון.**

ב. נתון כי שיעור ה- y **של נקודת הקיצון הוא** $\ell n(2\frac{1}{4})$ **, ומכאן שנקודת ההקיצון היא** $(\frac{a}{2},\ell n(2\frac{1}{4}))$ **.**

נציב את שיעורי נקודת הקיצון בפונקציה.

$$\ell n(2\frac{1}{4})=\ell n(-(\frac{a}{2})^2+a\cdot\frac{a}{2}$$

$$2\frac{1}{4}=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}$$

$$2\frac{1}{4}=\frac{a^2}{4}$$

$$9=a^2$$

$$\boxed{a=3}\quad\leftarrow a>0$$

תשובה: $a=3$ **.**

ג. נציב $a=3$ **במשוואת הפונקציה ונקבל** $\boxed{f(x)=\ell n(-x^2+3x)}$ **, המוגדרת בתחום** $0<x<3$**.**

נמצא את סוג נקודת הקיצון (נגזור מחדש, על-מנת לוודא שהפתרון נכון, מומלץ).

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x+3}{-x^2+3x}}$$

$$0=-2x+3$$

$$2x=3$$

$$x=1.5 \quad \rightarrow y=\ell n(2\frac{1}{4})$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=\frac{+}{+}>0 \\ f'(2)=\frac{-}{+}<0 \end{array}\right\} \boxed{(1.5,\ell n(2\frac{1}{4})),\max}$$

תשובה: נקודת מקסימום.

ד. (1) בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\ell n(-x^2+3x)=0$$

$$-x^2+3x=1$$

$$0=x^2-3x+1$$

$$x=2.62 \quad \rightarrow \boxed{(2.62,0)}$$

$$x=0.38 \quad \rightarrow \boxed{(0.38,0)}$$

תשובה: $(2.62,0)$ **,** $(0.38,0)$**.**

(2) שתי הצבות ליתר ביטחון, בתוך תחום ההגדרה, למציאת האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x **.**

כאשר $x\rightarrow 3$ **, למשל** $f(2.999999)=-12.72\rightarrow-\infty$ **, והישר** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית.**

כאשר $x\rightarrow 0$ **, למשל** $f(0.0000001)=-15.02\rightarrow-\infty$ **, והישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=3$ **,**

(3) סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x)=\ell n(-x^2+3x)$$