א. נסדר את הנתונים בטבלה נוחה.

b_n	a_n	
$b_1 = a_1$	a_1	**האיבר הראשון**
$d+1$	d	**הפרש הסדרה**
n	n	**מספר האיברים**

נתון כי a_4 **גדול ב-** 2 **מ-** b_3**, והמשוואה המתאימה היא:** $b_3+2=a_4$.

$$b_3+2=a_4$$
$$b_1+2d_b+2=a_1+3d_a$$
$$a_1+2(d+1)+2=a_1+3d$$
$$2d+4=3d$$
$$\boxed{d=4}$$

תשובה: $d=4$.

ב. נראה כי $b_n=a_n+n-1$ **(ניעזר בסימן שקילות** $(\Leftrightarrow)$**, בדומה להוכחת זהויות בטריגו).**

$$b_n=a_n+n-1$$
$$\Leftrightarrow b_1+d_b(n-1)=a_1+d_a(n-1)+n-1$$
$$\Leftrightarrow a_1+5(n-1)=a_1+4(n-1)+n-1$$
$$\Leftrightarrow a_1+5n-5=a_1+4n-4+n-1$$
$$\Leftrightarrow a_1+5n-5=a_1+5n-5 \quad o.k.$$

תשובה: הוכח ש-$b_n=a_n+n-1$**.**

ג. נתון כי בכל אחת מהסדרות יש n **איברים.**

$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot[2\cdot b_1+5\cdot(n-1)]}{2}-\frac{n\cdot[2\cdot a_1+4\cdot(n-1)]}{2}$$
$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot\{[2\cdot a_1+5\cdot(n-1)]-[2a_1+4\cdot(n-1)]\}}{2}$$
$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot[2a_1+5n-5-(2a_1+4n-4)]}{2}$$
$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot(2a_1+5n-5-2a_1-4n+4)}{2}$$
$$\boxed{S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$$

או, עפ"י סעיף ב:

$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot[b_1+b_n]}{2}-\frac{n\cdot[a_1+a_n]}{2}$$
$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot[b_1+b_n-(a_1+a_n)]}{2}$$
$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot(a_1+b_n-a_1-a_n)}{2}$$
$$S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot(b_n-a_n)}{2}$$
$$\boxed{S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$$

תשובה: $S_n^b-S_n^a=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$**.**

ד. נתון: $S_n^b - S_n^a = 780$ **.**

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=780$$

$$n^2-n=1560$$

$$n^2-n-1560=0$$

$$\boxed{n=40}\ o.k.$$

$$n=-39\ \ false, n\ is\ natural$$

נתון: $S_n^a=3,040$.

$$\frac{40\cdot\left[2\cdot a_1+4\cdot(40-1)\right]}{2}=3040$$

$$2a_1+156=152$$

$$2a_1=-4$$

$$\boxed{a_1=-2}$$

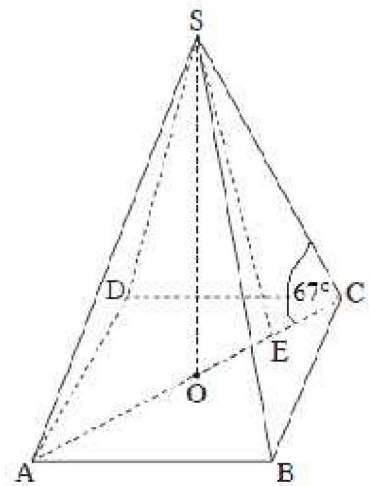
תשובה: $a_1=-2$ **.**

א. בסיס הפירמידה הישרה $SABCD$ הוא ריבוע.

נתון כי שטח בסיס הפירמידה הוא $4a^2$ ($a>0$ פרמטר).

שטח ריבוע שווה למחצית מכפלת האלכסונים, השווים זה לזה.

נסמן k - אורך אלכסון הריבוע.



$$4a^2=\frac{k^2}{2}$$

$$8a^2=k^2$$

$$\boxed{2a\sqrt{2}=k}$$

תשובה: אורך אלכסון הבסיס הוא $2a\sqrt{2}$.

ב. הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם,

שהוא מפגש אנכים אמצעיים,

ובמקרה זה, של הריבוע, למפגש האלכסונים.

נתונה הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה, $\sphericalangle SCO=67°$.

:$\underline{\Delta SOC}$

$$\tan\sphericalangle SOC=\frac{SO}{OC}$$

$$\tan 67°=\frac{SO}{a\sqrt{2}}$$

$$a\sqrt{2}\tan 67°=SO$$

$$\boxed{SO=3.332a}$$

תשובה: גובה הפירמידה, SO, הוא $3.332a$.

ג. נתון כי נפח הפירמידה שווה ל- 15 **.**

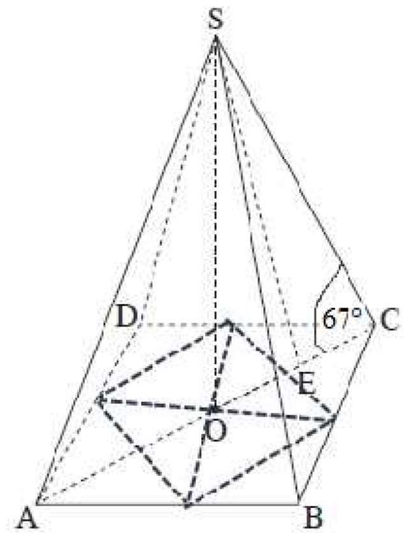
(1) נחשב את ערכו של a**.**

$$15=\frac{4a^2\cdot 3.32a}{3}$$

$$3.377=a^3$$

$$\boxed{a=1.5}$$

תשובה: $a=1.5$ **.**



(2) הנקודה E **היא אמצע הקטע** OC**.**

$$\text{AE}=\frac{3}{4}\text{AC}=\frac{3}{4}\cdot 2a\sqrt{2}=\frac{3}{4}\cdot 2\cdot 1.5\sqrt{2}=3.182$$

$$S_{\Delta\text{ASE}}=\frac{\text{AE}\cdot\text{SO}}{2}$$

$$S_{\Delta\text{ASE}}=\frac{3.182\cdot 3.332a}{2}$$

$$S_{\Delta\text{ASE}}=\frac{3.182\cdot 3.332\cdot 1.5}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta\text{ASE}}=7.95}$$

תשובה: שטח המשולש ASE **הוא** 7.95**.**

ד. חיברו את אמצעי צלעות הבסיס לקודקוד הפירמידה, S**, כך שנוצרה פירמידה חדשה.**

כל צלע של הבסיס החדש היא קטע אמצעים במשולש, שהוא חצי מהבסיס המקורי,

וכל אלכסון של הבסיס החדש שווה לצלע של הבסיס המקורי (של ABCD **).**

מכאן ששטח הבסיס החדש הוא חצי מהשטח המקורי (חצי מכפלת האלכסונים).

נפח הפירמידה החדשה (שלה אותו גובה, SO**) הוא חצי מהנפח המקורי, כלומר:** $15:2=7.5$ **.**

תשובה: נפח הפירמידה החדשה הוא 7.5 **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2-\cos^2 x$, **המוגדרת בתחום** $-\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ **.**

נשים לב שהפונקציה זוגית, כי $f(x)=f(-x)$ **(גם נוכיח בסעיף ג), ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה-** y**).**

נקודות קצה: $(\frac{2\pi}{3},1.75)$ **,** $(-\frac{2\pi}{3},1.75)$ **.**

(מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)

$$f'(x)=-2\cos x(-\sin x)$$

$$\boxed{f'(x)=\sin 2x}$$

$$0=\sin 2x=\sin 0$$

$$2x=2\pi k \qquad 2x=\pi+2\pi k$$

$$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$k=0:\boxed{(0,1)} \qquad k=0:\boxed{(\frac{\pi}{2},2)}$$

$$k=-1:\boxed{(-\frac{\pi}{2},2)}$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה.

(סימני הנגזרת הוספו, כי לעיתים נדרש לצייר את גרף הנגזרת.)

x	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	1.75		2		1		2		1.75
$f'(x)$		+		-		+		-	
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(\frac{2\pi}{3},1.75)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{2},2)$ **מקסימום,** $(0,1)$ **מינימום,** $(-\frac{\pi}{2},2)$ **מקסימום,** $(-\frac{2\pi}{3},1.75)$ **מינימום .**

ב. על פי טבלת העלייה והירידה, הערך המינימלי של הפונקציה, בתחום $-\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ **, הוא** 1**.**

תשובה: לגרף הפונקציה $f(x)$ **אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** x**.**

ג. נראה שהפונקציה $f(x)=2-\cos^2 x$ **זוגית .**

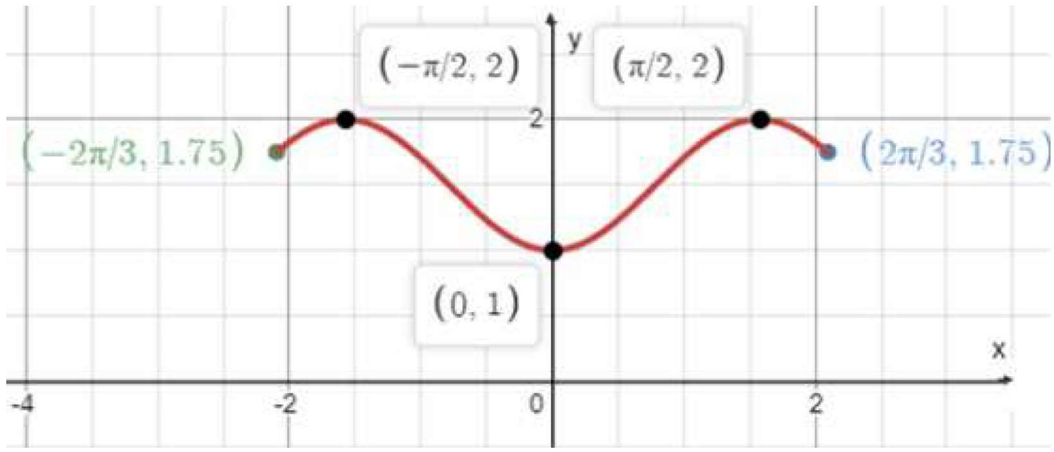
$$f(-x)=2-\cos^2(-x)$$

$$f(-x)=2-\cos^2 x \quad \leftarrow \cos(-x)=\cos x$$

$$f(-x)=f(x)$$

תשובה: הפונקציה היא זוגית.

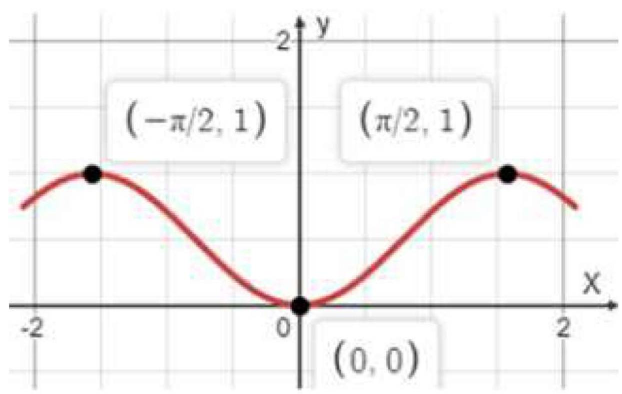
ד. סקיצה מתאימה של $f(x)=2-\cos^2 x$ **.**



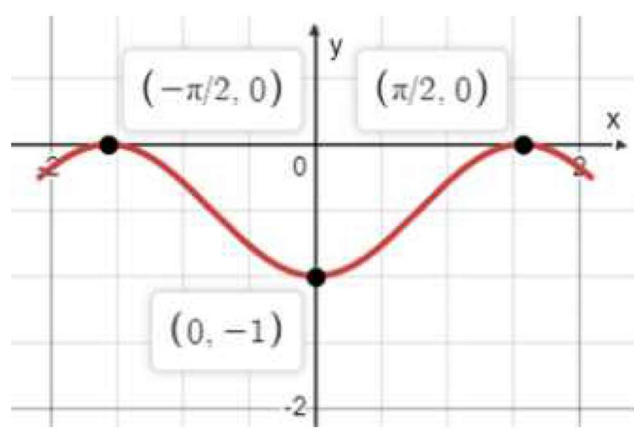
ה. $g(x)=f(x)+c$ **, היא תזוזה של הגרף של** $f(x)$ **כלפי מעלה עבור** c **חיובי, וכלפי מטה עבור** c **שלילי .**

נראה שקיימות שתי אפשריות לערכו של c**, שעבורו גרף הפונקציה** $f(x)$ **ישיק לציר ה-** x **.**

אם נוריד את הגרף של $f(x)$ 1 **יחידה כלפי מטה, נקבל את הסקיצה הבאה (השקה אחת לציר ה-** x**).**



אם נוריד את הגרף של $f(x)$ 2 **יחידות כלפי מטה, נקבל את הסקיצה הבאה (שתי השקות לציר ה-** x**).**



תשובה: $c=-1$ **, או** $c=-2$**.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=e^{2x-1}-1}$, המוגדרות לכל x .

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$. $\boxed{(0,\frac{1}{e}-1)} \leftarrow \quad f(0)=e^{2\cdot 0-1}-1=\frac{1}{e}-1\approx -0.632$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

$$0=e^{2x-1}-1$$
$$1=e^{2x-1}$$
$$0=2x-1$$
$$x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{1}{2},0)}$$

תשובה: $(0,\frac{1}{e}-1)$ **,** $(\frac{1}{2},0)$ **.**

(2) נראה שהפונקציה $f(x)$ עולה לכל x.

$$\boxed{f'(x)=2e^{2x-1}}$$
$$e^{2x-1}>0 \quad \rightarrow f'(x)>0$$

תשובה: $f(x)$ עולה לכל x, כי הנגזרת חיובית לכל x.

(3) כאשר x שואף לפלוס אינסוף, e^{2x-1} שואף לאינסוף ואין אסימפטוטה אופקית.

כאשר x שואף למינוס אינסוף, e^{2x-1} שואף לאפס, ויש אסימפטוטה אופקית לשמאל: $y=-1$.

ניתן לראות זאת, ואפילו מומלץ, בעזרת הצבות.

$$f(10)=e^{2\cdot 10-1}-1=178,482,300\rightarrow +\infty$$
$$f(-10)=e^{2\cdot(-10)-1}-1=-0.99999\rightarrow -1$$

תשובה: $y=-1$ אסימפטוטה אופקית לשמאל, עבור $x\rightarrow -\infty$.

ב. נתונה הפונקציה $\boxed{g(x)=e^{2-x}-1}$**, המוגדרות לכל** x **.**

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **.** $\boxed{(0,e^2-1)}$ $\leftarrow$ $f(0)=e^{2-0}-1=e^2-1\approx 6.389$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=e^{2-x}-1$$
$$1=e^{2-x}$$
$$0=2-x$$
$$x=2 \quad \rightarrow \boxed{(2,0)}$$

תשובה: $(0,e^2-1)$ **,** $(2,0)$**.**

(2) נראה שהפונקציה $g(x)$ **יורדת לכל** x**.**

$$\boxed{g'(x)=-e^{2-x}}$$
$$e^{2-x}>0 \quad \rightarrow g'(x)<0$$

תשובה: $g(x)$ **יורדת לכל** x**, כי הנגזרת שלילית לכל** x**.**

(3) כאשר x **שואף לפלוס אינסוף,** e^{2-x} **שואף לאפס, ויש אסימפטוטה אופקית לימין:** $y=-1$ **.**

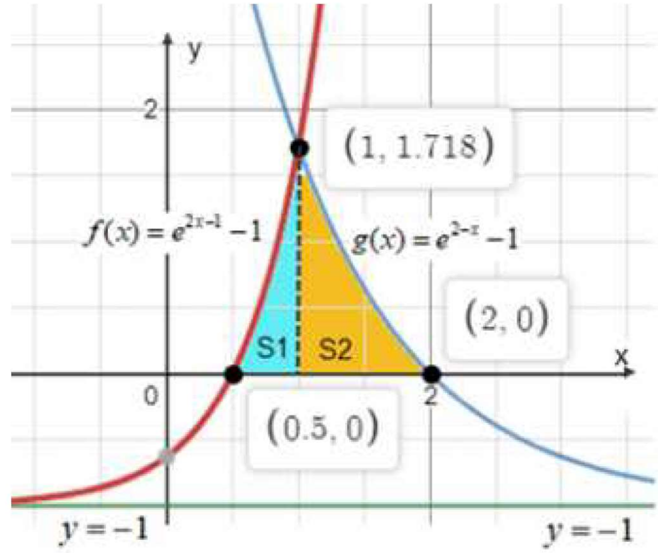
כאשר x **שואף למינוס אינסוף,** e^{2-x} **שואף לאינסוף ואין אסימפטוטה אופקית.**

ניתן לראות זאת, ואפילו מומלץ, בעזרת הצבות.

$$g(10)=e^{2-10}-1=-0.9997\rightarrow -1$$
$$g(-10)=e^{2-(-10)}-1=162,753\rightarrow +\infty$$

תשובה: $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית לימין, עבור** $x\rightarrow +\infty$ **.**

ג. סקיצה של הפונקציות, כולל סימון של נקודת החיתוך ביניהם (סעיף ד), ושטחים מתאימים (סעיף ה).



ד. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות $f(x)$ **ו-** $g(x)$**.**

$$\begin{cases} f(x)=e^{2x-1}-1 \\ g(x)=e^{2-x}-1 \end{cases}$$

$$e^{2x-1}-1=e^{2-x}-1$$

$$e^{2x-1}=e^{2-x}$$

$$2x-1=2-x \quad \rightarrow 3x=3$$

$$x=1 \quad \rightarrow y=e^{2-1}-1=e-1\approx 1.718 \quad \rightarrow \boxed{(1,e-1)}$$

תשובה: $(1,e-1)$.

ה. נחשב את השטח המבוקש, על ידי חלוקתו לשני שטחים.

$$S_2=\int_1^2 (e^{2-x}-1)\,dx$$

$$S_2=\left(\frac{e^{2-x}}{-1}-x\right)\Big]_{1}^{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2: \quad -e^{2-2}-2=-3 \\ x=1: \quad -e^{2-1}-1=-e-1 \end{array}\right\} S_2=e-2$$

$$S_1=\int_{0.5}^{1} (e^{2x-1}-1)\,dx$$

$$S_1=\left(\frac{e^{2x-1}}{2}-x\right)\Big]_{0.5}^{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1: \quad \dfrac{e^{2\cdot 1-1}}{2}-1=\dfrac{e}{2}-1 \\ x=0.5: \quad \dfrac{e^{2\cdot 0.5-1}}{2}-0.5=0 \end{array}\right\} S_1=\frac{e}{2}-1$$

וגודל השטח המבוקש: $S_1+S_2=S_1=\frac{e}{2}-1+e-2=1.5e-3\approx 1.077$.

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא $1.5e-3\approx 1.077$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\frac{1+\ell n\,x}{ax}}$ **, כאשר** $a>0$ **פרמטר.**

בתחום ההגדרה מכנה אינו מתאפס, והביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$ **.**

ב. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$**.**

$$0=\frac{1+\ell n\,x}{ax}$$

$$1+\ell n\,x=0$$

$$\ell n\,x=-1$$

$$x=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0.368\quad\rightarrow\boxed{(\frac{1}{e},0)}$$

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y **, כי בתחום ההגדרה** $x>0$**.**

תשובה: $(\frac{1}{e},0)$**.**

ג. נמצא את שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של** $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ell n\,x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-1-\ell n\,x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{a}\cdot\frac{\ell n\,x}{x^2}}$$

$$0=\ell n\,x$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0.5)=(-)\cdot\frac{(-)}{(+)}>0 \\ f'(2)=(-)\cdot\frac{(+)}{(+)}<0 \end{array}\right\}\max$$

תשובה: $x=1$ **מקסימום.**

ד. נרשום את תחומי העלייה והירידה, על פי סוג בקיצון ותחום ההגדרה .

תשובה: $x>1$ **ירידה,** $0<x<1$ **עלייה.**

ה. נתון כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא $\frac{1}{4}$, ומכאן שנקודת הקיצון היא $(1,\frac{1}{4})$.

(1) נציב את שיעורי נקודת הקיצון בפונקציה $f(x)=\frac{1+\ell n\, x}{ax}$.

$$\frac{1}{4}=\frac{1+\ell n 1}{a\cdot 1}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{a}$$
$$\boxed{a=4}$$

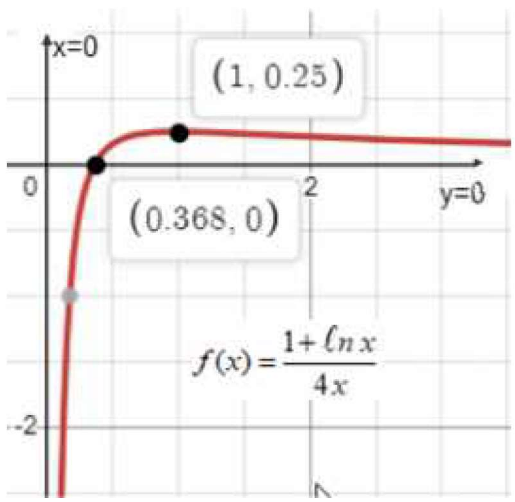
תשובה: $a=4$.

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1+\ell n\, x}{4x}$.

שתי הצבות ליתר ביטחון, בתוך תחום ההגדרה, למציאת האסימפטוטות .

כאשר $x\to+\infty$, למשל $f(100)=0.014\to+0$, והישר $y=0$ אסימפטוטה אופקית לימין.

כאשר $x\to 0$, למשל $f(0.001)=-1,476\to-\infty$, והישר $x=0$ אסימפטוטה אנכית.



ו. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)$, אשר סימטרית לפונקציה $f(x)$, כשציר הסימטריה שלהן הוא ציר ה- x .

מכיוון שהנקודה $(1,\frac{1}{4})$ הייתה מקסימום של $f(x)$, הרי ש- $(1,-\frac{1}{4})$ היא מינימום של $g(x)$.

ניתן לראות גם ש- $g'(x)=-f'(x)$, ולכן תחומי העלייה והירידה מתחלפים,

כאשר הנגזרת מתאפסת עבור אותו $x=1$, אולם ערכי הפונקציות הופכיים.

תשובה: $(1,-\frac{1}{4})$, מינימום.