א. (1) נסמן ב- x **את הזמן (בשעות) הדרוש לצינור** I **למלא את כל נפח הבְרֵכה לבדו, ו ב-** y **את צינור** II

	צינור	זמן (שעות)	חלק עבודה בשעה (הספק)	חלקי עבודה
בדרך כלל	I	6	$\frac{1}{x}$	$\frac{6}{x}$
	II	6	$\frac{1}{y}$	$\frac{6}{y}$
יום אחד	I	$0.25x$	$\frac{1}{x}$	0.25
	II	$0.25y$	$\frac{1}{y}$	0.25
סעיף ב	I	$0.3x$	$\frac{1}{x}$	0.3

בדרך כלל ממלאים שני הצינורות את הבריכה במשך 6 **שעות, לכן** $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$

יום אחד, מילאו כ"א רבע נפח, במשך m **שעות, לכן** $0.25x+0.25y=m$

$$\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1 \\ 0.25x+0.25y=m \quad \rightarrow x+y=4m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{x}+\frac{6}{4m-x}=1$$

$$24m-6x+6x=4mx-x^2 \quad \rightarrow x^2-4mx+24m=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{4m\pm\sqrt{16m^2-96m}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{1,2}=2m\pm2\sqrt{m^2-6m}} \quad m^2-6m\ge0 \quad \rightarrow m\ge6 \quad \leftarrow m>0$$

תשובה: $2m\pm2\sqrt{m^2-6m},\ m\ge6$

(2) פתרון אחד יתקבל כאשר $\Delta=0$ **, כלומר כאשר** $\boxed{m=6}$

ב. על פי הנתון $0.3x=3$ **ובהתאם** $x=10$

$$10=2m\pm2\sqrt{m^2-6m}$$

$$5-m=\pm\sqrt{m^2-6m}$$

$$25-10m+m^2=m^2-6m$$

$$25=4m$$

$$m=6.25$$

$$10=2\cdot6.25-2\sqrt{6.25^2-6\cdot6.25} \quad \rightarrow 10=10 \quad o.k.$$

תשובה: $m=6.25$

א. נתונה המשוואה $x^2-2(m+1)x+m^2=0$, $m\neq 0$

$a=1 \quad b=-2(m+1) \quad c=m^2$

זו הפרבולה (פונקציה ממעלה שנייה)

נדרש: $\Delta>0$ **עבור שני פתרונות שונים**

$\underline{\Delta>0}$

$\Delta=b^2-4ac<0$

$(-2(m+1))^2-4\cdot1\cdot m^2>0$

$4(m^2+2m+1)-4m^2>0$

$4m^2+8m+4-4m^2>0$

$8m+4>0$

$8m>-4$

$m>-0.5$

נתון כי $m\neq 0$ **ולכן חיתוך הפתרונות הוא** $m>-0.5, \quad m\neq 0$

תשובה: $m>-0.5, \quad m\neq 0$

ב. α **ו-** β **הם שני פתרונות השונים של המשוואה, ונשתמש בהתאם בנוסחאות וייטה.**

(1) נראה ש- $\alpha,\ m+1,\ \beta$ **סדרה חשבונית**

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=2(m+1)$ **לכן** $\alpha,\ m+1,\ \beta$ **סדרה חשבונית**

(2) נראה ש- $\alpha,\ m,\ \beta$ **סדרה הנדסית**

$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=m^2$ **לכן** $\alpha,\ m,\ \beta$ **סדרה הנדסית**

נתון גם כי $m\neq 0$ **ובהתאם איברי הסדרה אינם מתאפסים**

ג. על מנת שיתקיימו שני פתרונות חיוביים, נדרשים התנאים הבאים

$\Delta>0$ **- מתקיים, שכן נתון כי יש שני פתרונות שונים**

$\alpha+\beta>0$ **- מתקיים, שכן** $2(m+1)>0$ **מכון עבור** $m>-1$

ושני פתרונות שונים מתקיימים עבור $m>-0.5$

$\alpha\cdot\beta>0$ **- מתקיים, שכן** $\alpha\cdot\beta=m^2>0$ **עבור** $m\neq 0$

לכן: $\alpha>0$ **וגם** $\beta>0$ **עבור כל** m **בתחום הנתון בסעיף זה .**

הוכח.

א. נגדיר את המאורעות הבאות:

A **- מרכיב משקפיים** $\overline{A}$ **- אינו מרכיב משקפיים** B **- בעל השכלה גבוהה** $\overline{B}$ **- חסר השכלה גבוהה**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$(P(B))^3 = 0.064 \quad \rightarrow P(B) = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{B}) = 0.6$$

$$2 \cdot P(A/B) = P(A/\overline{B})$$

$$2 \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$2 \cdot \frac{P(A \cap B)}{0.4} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{0.6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} P(A \cap \overline{B})$$

נסמן $P(A \cap B) = x$ **ובהתאם** $P(A) = 4x$, $P(A \cap \overline{B}) = 3x$ **(ראה טבלה בסעיף ב')**

נמצא את ההסתברות שאם ידוע שאדם מהעיר מרכיב משקפיים. אז הוא גם בעל השכלה גבוהה.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{x}{4x} = 0.25$$

תשובה: ההסתברות היא 0.25 **.**

ב. ההסתברות שארבעה תושבי העיר בעלי השכלה גבוהה שנבחרו באקראי הם מרכיבי משקפיים היא $\frac{81}{256}$**.**

$$(P(\overline{A}/\overline{B}))^4 = \frac{81}{256} \quad \rightarrow P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.75$$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$0.75 = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{0.6}$$

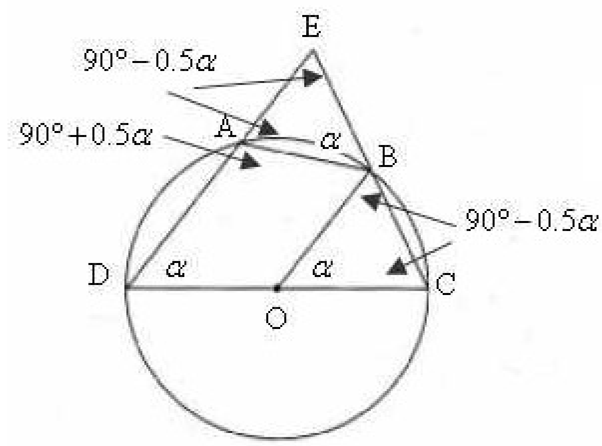
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.45$$

<u>נציב בטבלה ונשלים נתונים</u>

	מרכיב משקפיים A	**לא מרכיב משקפיים** $\overline{A}$	
B **- בעל השכלה גבוהה**	$x = 0.05$	0.35	0.4
$\overline{B}$ **- חסר השכלה גבוהה**	$3x = 0.15$	0.45	0.6
	$4x = 0.2$	0.8	1

על פי הטבלה, ההסתברות שאדם בעיר מרכיב משקפיים והוא גם בעל השכלה גבוהה היא 0.05

תשובה: ההסתברות היא 0.05 **.**



<u>נתונים</u>

1. DC **הוא קוטר במעגל שמרכזו** O

2 . $OB \parallel DE$

3. $\angle BOC = \alpha$

עבור ב

4. $S_{\Delta OBC} = S_{\Delta BEA}$

צ"ל: א. $\angle ABO$ **ע"י** α

ב. $\Delta OBC \cong \Delta BEA$

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
1	5	DC הוא קוטר במעגל שמרכזו O	נתון
3	6	$\angle BOC = \alpha$	נתון
5	7	$OB = OC$	רדיוסים שווים זה לזה
6, 7	8	$\angle OBC = \angle OCB = 90° - 0.5\alpha$	זוויות בסיס שוות במש"ש OBC
8	9	$\angle DAB = 90° + 0.5\alpha$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל $180°$
2	10	$OB \parallel DE$	נתון
9, 10	11	$\angle ABO = 90° - 0.5\alpha$	זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל- $180°$
		מ.ש.ל. א	
8, 11	12	$\angle EBA = \alpha$	זווית שטוחה שווה ל- $180°$
6, 12	13	(ז) $\angle EBA = \angle BOC = \alpha$	כלל מעבר
10	14	(ז) $\angle E = \angle OBC$	זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים
13, 14	15	$\Delta OBC \sim \Delta BEA$	משפט דמיון זווית זווית
15	16	$\frac{OB}{BE} = \frac{OC}{BA} = \frac{BC}{EA}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
4	17	$S_{\Delta OBC} = S_{\Delta BEA}$	נתון
15, 16, 17	18	$\frac{OB}{BE} = \frac{OC}{BA} = \frac{BC}{EA} = 1$	יחסי שטחים במשולשים דומים שווה לריבוע יחס בצלעות המתאימות
18	19	$\Delta OBC \cong \Delta BEA$	משפט חפיפה צלע צלע צלע
		מ.ש.ל. ב	

הערה – בסעיף ב נקבל ששני המשולשים שווי צלעות, שכל זוויותיהם $60°$

וזאת כי גם $OB = OC$ **, כידוע, ולכן על פי כלל המעבר כל הצלעות שוות זו לזו**

<u>נתונים</u>

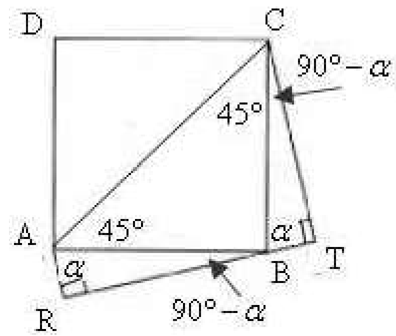
1. $ABCD$ **ריבוע**

2 . $\angle R = 90°$

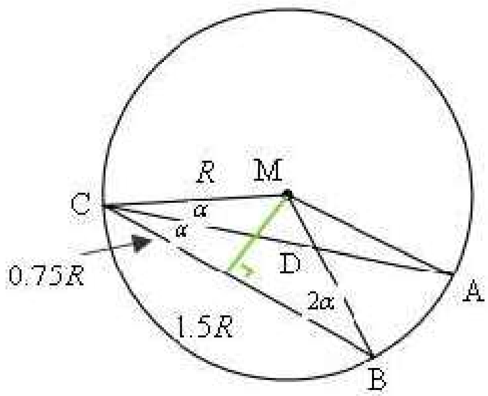
3. $\angle T = 90°$

צ"ל: א. $AR + CT = TR$

ב. שטח המרובע $ACTR$ **באמצעות** TR



הסבר		טענה	נימוק
2	4	$\angle R = 90°$	נתון
3	5	$\angle T = 90°$	נתון
	6	$\angle CBT = \alpha$	סימון
6 ,5	7	$\angle BCT = 90° - \alpha$	סכום זוויות ΔBCT $180°$
1	8	$ABCD$ ריבוע	נתון
8	9	$\angle CBA = 90°$	זוויות הריבוע ישרות
9 ,6	10	$\angle ABR = 90° - \alpha$	זווית שטוחה משלימה ל- $180°$
10 ,7	11	(ז) $\angle ABR = \angle BCT$	כלל מעבר
8	12	(צ) $AB = BC$	צלעות הריבוע שוות זו לזו
10 ,4	14	$\angle BAR = \alpha$	סכום זוויות ΔBAR $180°$
14 ,6	15	(ז) $\angle BAR = \angle CBT$	כלל מעבר
15 ,12 ,11	16	$\Delta BAR \cong \Delta CBT$	משפט חפיפה זווית צלע זווית
	17	$RB + BT = TR$	סכום קטעים
16	18	$RB = CT$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים
16	19	$BT = AR$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים
19 ,18 ,17	20	$AR + CT = TR$	הצבה
		מ.ש.ל. א	
5 ,4	21	$CT \parallel RA$	זווית חד צדדיות משלימות ל- $180°$
14 ,6	22	$\angle RAC = 45° + \alpha,$ $\angle ACT = 135° - \alpha$	אלכסוני הריבוע חוצים את הזוויות הישרות וסכום זוויות
22 ,5 ,4	23	אם $\alpha = 45°$ $ACTR$ מלבן	מרובע עם ארבע זוויות ישרות
23 ,20	24	$S_{ACTR} = TR \cdot CT = \frac{TR \cdot 2CT}{2}$ $S_{ACTR} = \frac{TR(AR + CT)}{2}$ $\boxed{S_{ACTR} = 0.5(TR)^2}$	נוסחת שטח מלבן צלעות נגדיות שוות במלבן הצבה
21	25	אם $\alpha \neq 45°$ $ACTR$ הוא טרפז	זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקביל
25 ,20	26	$S_{ACTR} = \frac{(AR + CT) \cdot TR}{2}$	נוסחת שטח טרפז
26 ,20	27	$S_{ACTR} = \frac{TR \cdot TR}{2}$	הצבה
27	28	$\boxed{S_{ACTR} = 0.5(TR)^2}$	חישוב
		מ.ש.ל. ב	



(נתון) $S_{\Delta CBD} = 1.5 S_{\Delta CDM}$

(לשני המשולשים גבהים שווים לצלעות ביחס 1.5**)** $\frac{BD}{MD} = 1.5$

(סימון) $\angle BCD = \alpha$

(נתון) $\angle CBM = 2\angle ACB$

(הצבה) $\measuredangle CBD = 2\alpha$

(סימון) $MC = MB = R$

(ΔCMD **שווה שוקיים וזווית בסיס שווה)** $\angle MCB = 2\alpha$

(הפרש זוויות) $\angle MCD = \alpha$

(כלל מעבר) $\angle MCD = \angle BCD = \alpha$

(משפט חוצה זווית) $\frac{BC}{MC} = \frac{BD}{MD} = 1.5$

$BC = 1.5R$

בניית עזר $ME \perp BC$

(ישר העובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר חוצה אותו) $BE = CE$

$MC = 0.75R$

$\underline{\Delta MCE}$

$\cos\angle MCB = \frac{CE}{CM}$

$\cos 2\alpha = \frac{0.75R}{R}$

$2\alpha = 41.41°$

תשובה: $\angle CBM = 41.41°$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{(x-b)^2}{x^2-4}$, $b>2$.

(1) תחום ההגדרה $\boxed{x\neq\pm2}$ $x^2-4\neq0 \ \to x^2\neq4 \ \to$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2b}{x}+\frac{b^2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0+0}{1-0}=1$$

, לכן $y=1$ **אסימפטוטה אופקית**

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=\frac{(2-b)^2}{4-4}=\frac{+}{0^{-+}}=\pm\infty \quad \leftarrow b>2$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=\frac{(2-b)^2}{4-4}=\frac{+}{0^{-+}}=\pm\infty \quad \leftarrow b>2$$

, לכן $x=2, x=-2$ **אסימפטוטה אנכית**

תשובה: $x\neq\pm2$ **,** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=2, x=-2$ **אסימפטוטות אנכית**

(2) חיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל:** $(b,0)$ **, חיתוך עם ציר** y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,-\frac{b^2}{4})$

תשובה: $(b,0)$ **,** $(0,-\frac{b^2}{4})$ **.**

(3) נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן

$$f'(x)=\frac{2(x-b)(x^2-4)-2x(x-b)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{2(x-b)(x^2-4-x(x-b))}{(x^2-4)^2}$$

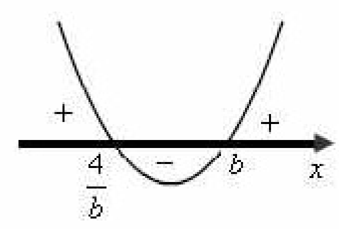
$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-b)(bx-4)}{(x^2-4)^2}}$$

$$0=(x-b)(bx-4)$$

$$x=b \quad \to (b,0)$$

$$x=\frac{4}{b} \quad \to (\frac{4}{b},\frac{4-b^2}{4})\ f(\frac{4}{b})=\frac{(\frac{4}{b}-b)^2}{(\frac{4}{b})^2-4}=\frac{\frac{(4-b^2)^2}{b^2}}{\frac{16-4b^2}{b^2}}=\frac{(4-b^2)^2}{4(4-b^2)}=\frac{4-b^2}{4}$$

גרף סימני הנגזרת



פרבולה בעלת מינימום $\cup$

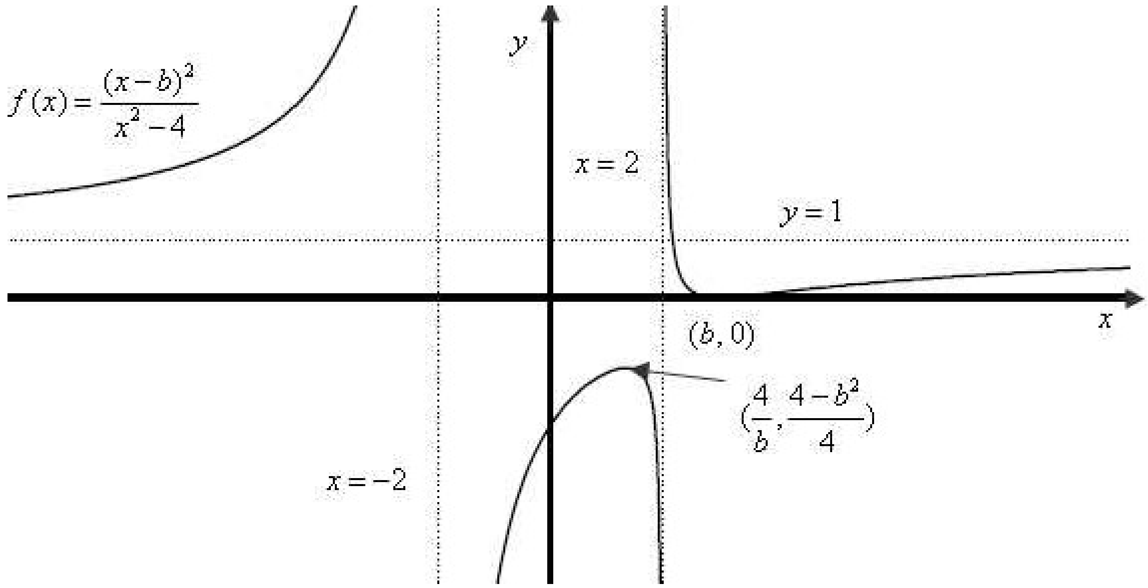
$b>2 \longrightarrow b>\frac{4}{b},$

$x=\frac{4}{b}$ **עוברים מנגזרת חיובית לשלילית, כלומר מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

$x=b$ **עוברים מנגזרת שלילית לחיובית, כלומר מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

תשובה: $(b,0)$ **מינימום,** $(\frac{4}{b},\frac{4-b^2}{4})$ **מקסימום**

ב. עבור $b>2$ הסקיצה המתאימה



ג. נמצא את התחום המשותף שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית <u>וגם</u> פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית

כאשר נתון כי ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

כאשר פונקציית הנגזרת שלילית, הרי ש $f(x)$ יורדת.

על פי הסקיצה $f(x)$ יורדת עבור $2<x<b$ או $\frac{4}{b}<x<2$.

ע"פ נקודת המקסימום, שמתקיימת באזור שבו $f''(x)<0$, והעובדה שיש רק נקודת פיתול אחת,

$f(x)$ קעורה עלפי מטה, כלומר $f''(x)$ שלילית בתחום $-2<x<2$ ובתחום נוסף לקראת האסימפטוטה האופקית.

(נקודת הפיתול צפויה להיות בתחום $x>b$, בתחום בו הפונקציה עולה).

לכן, פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית <u>וגם</u> פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בתחום $\frac{4}{b}<x<2$.

תשובה: $\frac{4}{b}<x<2$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$ **בתחום** $-3\pi \le x \le 3\pi$ **.**

$f(-x)=\dfrac{2\cos^2(-\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(-\frac{x}{2})}=\dfrac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=f(x)$ **ולכן הפונקציה זוגית.**

ב. תחום ההגדרה $2\cos^2(\frac{x}{2})\ne 0 \quad \to \cos(\frac{x}{2})\ne 0 \quad \to \frac{x}{2}\ne \frac{\pi}{2}+\pi k \quad \to \boxed{x\ne \pi+2\pi k}$

תשובה: האסימפטוטות אנכיות: $x=3\pi, \quad x=\pi, \quad x=-\pi, \quad x=-3\pi$ **(עבור** $k=0,1,-1,-2$ **)**

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון

$$f(x)=\frac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=1-\frac{1}{\cos x+1}$$

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{(\cos x+1)^2}$$

$$0=\sin x \quad \to x=\pi k \quad \to k=-2,0,2 \quad \to x=-2\pi,0,2\pi$$

$$f''(mone)=-\cos x \quad \to f''(-2\pi)=-1<0, f''(0)=-1<0 \quad \to Max$$

$$f(-2\pi)=f(2\pi)=1-\frac{1}{\cos 2\pi+1}=0.5, \quad f(0)=1-\frac{1}{\cos 0+1}=0.5$$

$x=2\pi$ **מקסימום בשל זוגיות הפונקציה**

השימוש בנגזרת שנייה לקביעת סימן הקיצון אפשרי, כי מכנה $f'(x)$ **חיובי ו -** $f'(x)=0$

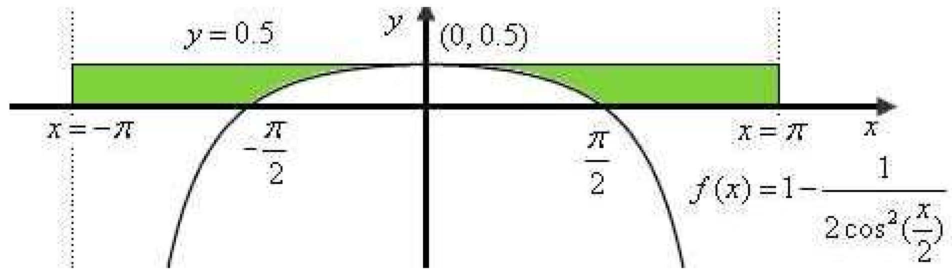
תשובה: $(2\pi,0.5), \quad (0,0.5), \quad (-2\pi,0.5)$ **מקסימום**

ד. נחשב את השטח המבוקש, תוך שימוש בהצגה הבאה של הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$ **,**

והישר $y=0.5$ **העובר בנקודת המקסימום.**

בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $\cos x=0$ **ולכן** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

ועבור $k=0,-1$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}$



נחשב את השטח המבוקש: $S_{\text{GREEN}}=S_{\text{MALBEN}}-S_{WHITE}$

$$S_{\text{MALBEN}}=2\pi\cdot 0.5=\pi$$

$$S_{\text{WHITE}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}-0)\,dx$$

$$S_{\text{WHITE}}=(x-\frac{0.5}{0.5}\tan\frac{x}{2})\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S_{\text{WHITE}}=(\frac{\pi}{2}-\tan\frac{\pi}{4})-(-\frac{\pi}{2}-\tan\frac{-\pi}{4})$$

$$S_{\text{WHITE}}=(\frac{\pi}{2}-1)-(-\frac{\pi}{2}+1)$$

$$\boxed{S_1=\pi-2}$$

$$S_{\text{GREEN}}=\pi-(\pi-2)=2$$

תשובה: 2 **יח"ר**

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ **,** $a>0$

הפונקציה שיש להביא למקסימום **היא** שטח המשולש EBC.

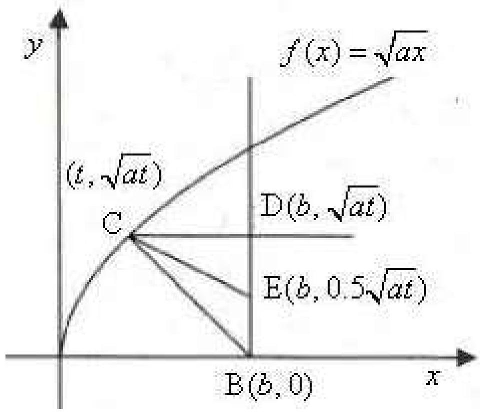
נסמן: t **- שיעור ה-** x **של הנקודה** C**.**

בהתאם שיעורי הנקודה C **שעל גרף הפונקציה** $\mathrm{C}(t,\sqrt{at})$

$\mathrm{D}(b,\sqrt{at})$ **, ו-** $\mathrm{E}(b,0.5\sqrt{at})$ **כאמצע קטע** BD **המקביל לציר ה-** y **.**

בהתאם צלע המשולש $\boxed{\mathrm{BE}=0.5\sqrt{at}}$

והגובה המתאים $\boxed{\mathrm{CD}=b-t}$



$$S_{\Delta\mathrm{EBC}}=\frac{0.5\sqrt{at}\cdot(b-t)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta\mathrm{EBC}}=0.25\cdot(\sqrt{at}\cdot(b-t))}$$

$$S'(t)=0.25\cdot\left(\frac{a(b-t)}{2\sqrt{at}}-\sqrt{at}\right)$$

$$S'(t)=0.25\cdot\frac{ab-at-2at}{2\sqrt{at}}$$

$$\boxed{S'(t)=\frac{a(b-3t)}{8\sqrt{at}}}$$

$$0=(b-3t)\quad\leftarrow a>0$$

$$t=\frac{b}{3}\qquad s'(0.1b)=\frac{+(b-0.3b)}{+}>0,\quad s'(0.4b)=\frac{+(b-1.2b)}{+}<0\quad\leftarrow b>0$$

$$\boxed{t=\frac{b}{3},\quad Max}$$

נתון כי עבור $\mathrm{C}(2,4)$ **השטח הוא מקסימלי**

לכן, $\frac{b}{3}=2\quad\rightarrow\boxed{b=6}$

וגם $4=\sqrt{a\cdot\frac{b}{3}}=\sqrt{a\cdot\frac{6}{3}}=\sqrt{2a}$

$\sqrt{16}=\sqrt{2a}\quad\rightarrow\boxed{a=8}$

תשובה: $a=8$ **,** $b=6$

הערה: ניתן גם לנצל את הנתון שעבור $\mathrm{C}(2,4)$ **שטח המשולש** CBE **הוא מקסימלי.**

בהתאם: כאשר $t=2$ $y_{\mathrm{C}}=4$ **ולכן** $4=\sqrt{a\cdot 2}$ **ומכאן ש** $a=8$ **.**

וניתן להציב $t=2,a=8$ **כבר לאחר הנגזרת ולקבל** $0=0.25\cdot\left(\frac{8(b-2)}{2\sqrt{8\cdot 2}}-\sqrt{8\cdot 2}\right)$ **ואז** $b=6$ **בחישוב קל !!!**