נסמן ב- x את מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה (קמ"ש, קבועה) .

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מעיר A עד מקום התקלה	$\frac{3}{4}$	x	$\frac{3}{4}x$
ממקום תקלה חזרה למוסך	$\frac{1}{5}$	50	10
המתנה במוסך	$\frac{33}{60}=\frac{11}{20}$	-	-
מהמוסך לעיר B	$\frac{520-3x}{4(x-10)}$	$x-10$	$120-(\frac{3}{4}x-10)=130-\frac{3}{4}x=\frac{520-3x}{4}$

זמן הנסיעה המתוכנן, במהירות x של מרחק 120 ק"מ, הוא $\frac{120}{x}$

הנהג הגיע ל- B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת,

כלומר המשוואה המתאימה: $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+\frac{520-3x}{4(x-10)}=\frac{120}{x}+1$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+\frac{520-3x}{4(x-10)}=\frac{120}{x}+1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{520-3x}{4(x-10)}=\frac{120}{x} \quad /\cdot 4x(x-10)$$

$$2x(x-10)+x(520-3x)=480(x-10)$$

$$2x^2-20x+520x-3x^2=480x-4800$$

$$-x^2+20x+4800=x$$

$$x_{1,2}=\frac{-20\pm 140}{-2}$$

$$\boxed{x=80} \quad \leftarrow x>0$$

תשובה: מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה 80 קמ"ש.

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{(6\cdot1-2)\cdot4^{2\cdot1+1}+8}{3}=\frac{264}{3}=88$ **אגף שמאל:** $2\cdot4+5\cdot4^2=88$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+8}{3}=2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+(6k-1)\cdot4^{2k}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\underbrace{2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+(6k-1)\cdot4^{2k}}_{\downarrow}+(6k+2)\cdot4^{2k+1}+(6k+5)\cdot4^{2k+2}=\frac{(6k+4)\cdot4^{2k+3}+8}{3}$$

$$\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+8}{3}+(6k+2)\cdot4^{2k+1}+(6k+5)\cdot4^{2k+2}=\frac{(6k+4)\cdot4^{2k+3}+8}{3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+8+3(6k+2)\cdot4^{2k+1}+3(6k+5)\cdot4^{2k+2}}{3}=\frac{(6k+4)\cdot4^{2k+3}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+3(6k+2)\cdot4^{2k+1}+12(6k+5)\cdot4^{2k+1}+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}(6k-2+3(6k+2)+12(6k+5))+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}(6k-2+18k+6+72k+60)+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}(96k+64)+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}\cdot16(6k+4)+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ב. יש למצוא את ערך הביטוי $2\cdot 4+5\cdot 16+8\cdot 64 ...+26\cdot 262{,}144$

נשים לב כי עבור $n=4$ **מתקבל מהטענה שהוכחה בסעיף א –**

$$2\cdot 4+5\cdot 4^2+8\cdot 4^3+11\cdot 4^4+...+(6\cdot 4-1)\cdot 4^{2\cdot 4}=\frac{(6\cdot 4-2)\cdot 4^{2\cdot 4+1}+8}{3}$$

$$2\cdot 4+5\cdot 4^2+8\cdot 4^3+11\cdot 4^4+...+23\cdot 4^8=1{,}922{,}392$$

ולכן: $2\cdot 4+5\cdot 4^2+8\cdot 4^3+11\cdot 4^4+...+23\cdot 4^8+26\cdot 262{,}144=1{,}922{,}392+26\cdot 262{,}144$

כלומר: $2\cdot 4+5\cdot 4^2+8\cdot 4^3+11\cdot 4^4+...+23\cdot 4^8+26\cdot 262{,}144=8{,}738{,}136$

תשובה: $8{,}738{,}136$

א. נמצא את ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים.

ההסתברות שיהיה נקר (פנצ'ר) בגלגל חדש בזמן הטיול היא 0.05 **.**

ההסתברות שיהיה נקר בגלגל הרזרבי בזמן הטיול היא 0.25 **.**

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p=0.05$ **,** $n=4$ **,** $k=1$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P_n(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

$$\mathrm{P}_4(1)=\binom{4}{1}0.05^1(1-0.05)^{4-1}$$
$$\mathrm{P}_4(1)=\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot 0.05\cdot 0.95^3$$
$$\mathrm{P}_4(1)=4\cdot 0.05\cdot 0.95^3$$
$$\mathrm{P}_4(1)=0.1715$$

תשובה: ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים היא 0.1715 **.**

ב. נניח שההסתברות לנקר נוסף לא משתנה, כי מצוין שהנקר הראשון היה בתחילת הטיול.

(1) נחשב את ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל הרזרבי מבין ארבעת הגלגלים.

כלומר, שיהיה נקר בגלגל הרזרבי ולא יהיה נקר בשלושת הגלגלים האחרים.

$$\mathrm{P}=0.25\cdot(1-0.05)^3=0.25\cdot 0.95^3$$
$$\mathrm{P}=0.2143$$

תשובה: ההסתברות היא 0.2143**.**

(2) נחשב את ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים.

כלומר, שיהיה נקר בגלגל הרזרבי ולא יהיה נקר בשלושת הגלגלים האחרים ($p=0.2143$ **),**

או שיהיה נקר באחד מתוך שלושת הגלגלים האחרים ולא יהיה נקר בגלגל הרזרבי.

נחשב את ההסתברות שיהיה נקר באחד מתוך שלושת הגלגלים האחרים.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p=0.05$ **,** $n=3$ **,** $k=1$

$$\mathrm{P}_3(1)=\binom{3}{1}0.05^1(1-0.05)^{3-1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}\cdot 0.05\cdot 0.95^2=3\cdot 0.05\cdot 0.95^2=0.1354$$

ולכן ההסתברות המבוקשת היא: $\mathrm{P}=0.2143+0.1354\cdot 0.75=0.3158$

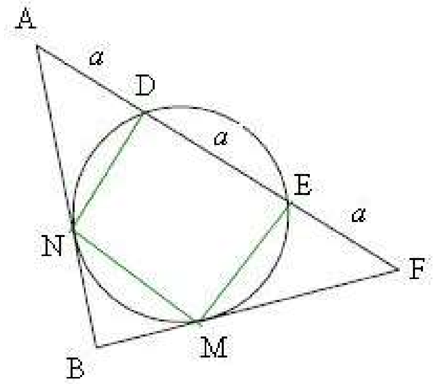
תשובה: ההסתברות היא 0.3158**.**

(3) זו הסתברות מותנית: ההסתברות שהנקר היה בגלגל הרזרבי, אם ידוע שהיה נקר רק בגלגל אחד.

$$\mathrm{P}(\text{נקר ברזרבי / נקר בגלגל אחד})=\frac{\mathrm{P}(\text{pancture in the spare}\cap\text{pancture in 1 wheel})}{\mathrm{P}(\text{pancture in 1 wheel})}=\frac{0.2143}{0.3158}=0.6785$$

תשובה: ההסתברות היא 0.6785**.**

נכתב ע"י עפר ילין



נתונים

1. ANB **משיק למעגל בנקודה** N

2. FMB **משיק למעגל בנקודה** M

3 . $AD = DE = EF$

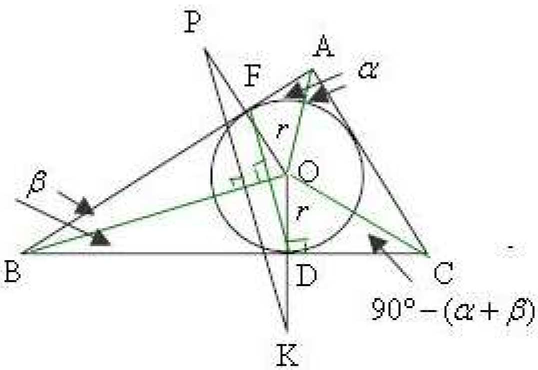
צ"ל

א. $AN = MF$

ב. $\Delta ADN \cong \Delta FEM$

ג. במרובע $MNDE$ **יש שתי צלעות מקבילות זו לזו**

נימוק	טענה		הסבר
נתון + סימון	$AD = DE = EF = a$	4	3
נתון	ANB משיק למעגל בנקודה N	5	1
אם מנקודה יוצאים משיק וחותך למעגל, אז ריבוע המשיק שווה למכפלת החותך בחלקו החיצוני	$AN^2 = AD \cdot AE$	6	5
הצבה וחישוב	$AN^2 = a \cdot (a+a) = 2a^2$	7	5 ,4
נתון	FMB משיק למעגל בנקודה M	8	2
אם מנקודה יוצאים משיק וחותך למעגל, אז ריבוע המשיק שווה למכפלת החותך בחלקו החיצוני	$FM^2 = FE \cdot FD$	9	8
הצבה וחישוב	$FM^2 = a \cdot (a+a) = 2a^2$	10	9 ,4
כלל מעבר וחישוב	$AN = MF$ (צ)	11	10 ,7
מ.ש.ל. א			
אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה	$BN = BM$ (צ)	12	8 ,5
חיבור קטעים שווים לקטעים שווים	$BN + NA = BM + MF$	13	12 ,11
סכום קטעים	$BA = BF$	14	13
מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔABF	$\sphericalangle A = \sphericalangle F$ (ז)	15	14
משפט חפיפה צלע זווית צלע	$\Delta ADN \cong \Delta FEM$	17	16,15,11
מ.ש.ל. ב			
חילוק קטעים שווים בקטעים שווים	$\frac{BM}{MF} = \frac{BN}{NA}$	18	12 ,11
משפט תאלס הפוך	$AF \parallel MN$	19	18
חלקים מקטעים מקבילים	$DE \parallel MN$	20	19
מ.ש.ל. ג			



נתונים

1. ΔABC **חסום במעגל שמרכזו** O.
2. BDC **משיק למעגל בנקודה** D
3. BFA **משיק למעגל בנקודה** F
4. $OD=DK$.**5** $OF=FP$
6. r - **רדיוס מעגל חסום**, $\sphericalangle BAC=2\alpha$, $\sphericalangle ABC=2\beta$

צ"ל

א. $FD\perp BO$ **ב.** $BO\perp PK$

ג. שטח המשולש BOC.

הסבר		טענה	נימוק
1	7	$OF=OD$	רדיוסים שווים במעגל
3 ,2	8	$BF=BD$	אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה
8 ,7	9	$BFOD$ דלתון	שני משולשים שווי שוקיים עם בסיס משותף
9	10	$FD\perp BO$	אלכסונים מאונכים זה לזה בדלתון
		מ.ש.ל. א	
4	11	$OD=DK$	נתון
5	12	$OF=FP$	נתון
12 ,11	13	FD קטע אמצעים ΔPOK	מחבר אמצעי שתי צלעות
13	14	$FD\parallel BK$	קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית
14 ,10	15	$BO\perp PK$	אם ישר מקביל לישר שני ומאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי
		מ.ש.ל. ב	

ולעבודת הטריגו

$\sphericalangle C=180°-(2\alpha+2\beta)$ **(סכום זוויות ב-** ΔABC $180°$)

$\sphericalangle OCD=90°-(\alpha+\beta)$ **(אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל**

$\sphericalangle OBC=\beta$ **אז הישר המחבר בין הנקודה למרכז המעגל חוצה את הזווית בין המשיקים)**

$\sphericalangle BOC=180°-(\beta+90°-(\alpha+\beta))=90°+\alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔBOC $180°$)

$\sphericalangle OBD=90°$ **(רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)**

$\underline{\Delta BOD}$

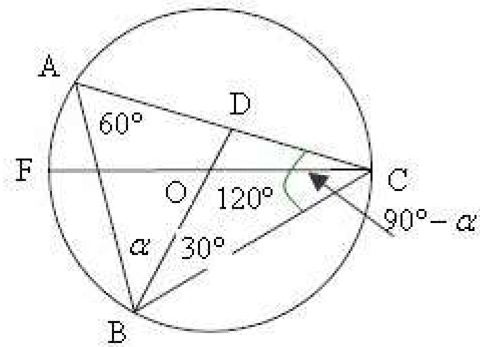
$$\sin\beta=\frac{r}{BO}\quad\rightarrow BO=\frac{r}{\sin\beta}$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{r}{\sin\beta})^2 \cdot \frac{\sin\beta \sin(90° + \alpha)}{\sin(90° - (\alpha + \beta))}$$

$$\boxed{S_{BOC} = \frac{r^2 \cos\alpha}{2\sin\beta \cos(\alpha + \beta)}}$$

מ.ש.ל. ג

בדרך חלופית: על פי שטח משולש השווה למחצית מכפלת צלע בגובה נקבל את הביטוי $\frac{r^2[\cot\beta + \tan(\alpha + \beta)]}{2}$



א. הקשת $\overset{\frown}{BC}$ **ארוכה פי** 2 **מהקשת** $\overset{\frown}{FB}$ **(נתון)**

CF **הוא קוטר במעגל (נתון) ולכן** $\overset{\frown}{FB}=180°$,

כאשר $\overset{\frown}{BC}=\frac{2}{3}\cdot180°=120°$ **ולכן** $\sphericalangle BAC=60°$

(זווית היקפית שווה לחצי הקשת עליה היא נשענת)

תשובה: $\sphericalangle BAC=60°$

ב. נמצא את היחס $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}$

לשני המשולשים גובה משותף לצלעות AD **ו-** AC **(** h **אנך מ-** B **לצלע** AC **, לא מצויר בסרטוט).**

לכן, $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{0.5AD\cdot h}{0.5AC\cdot h}=\frac{AD}{AC}$

$\sphericalangle BOC=120°$ **(זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)**

$\sphericalangle OBC=\sphericalangle OCB=30°$ **(מול רדיוסים שווים מונחות זוויות שוות** ΔOBC **)**

$\sphericalangle DCB=90°-\alpha$ **(סכום זוויות** ΔABC $180°$**)**

$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{AB}{\sin(180°-(60°+\alpha))}=\frac{AD}{\sin\alpha}\quad\rightarrow AB=\frac{AD\sin(60°+\alpha)}{\sin\alpha}$$

$\underline{\Delta ABC}$

$$\frac{AC}{\sin(30°+\alpha)}=\frac{AB}{\sin(90°-\alpha)}$$

$$AC=\frac{AD\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2AD\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}{\sin2\alpha}$$

ובהתאם יחס השטחים: $$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{\frac{2AD\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}{\sin2\alpha}}=\frac{\sin2\alpha}{2\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{\sin2\alpha}{2\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}$

ג. נתון גם: $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$ **ועל פי סעיף ב:** $\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\sin(60°+\alpha)}$

$$\frac{2}{3}=\frac{\sin\alpha}{\sin(60°+\alpha)}$$

$$2(\sin 60°\cos\alpha+\cos 60°\sin\alpha)=3\sin\alpha \quad /:\sin\alpha\neq 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+1=3 \quad \rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\alpha=40.89°} \quad \leftarrow 0<\alpha<90°$$

תשובה: $\alpha=40.89°$

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$, $a>0$

כיוון ש- $a>0$ **הרי שהמכנה** x^2+3a **אינו מתאפס (חיובי לכל** x**) והפונקציה מוגדרת לכל** x

תשובה: כל x

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3a)-2x(x^2-a)}{(x^2+3a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3a-x^2+a)}{(x^2+3a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{8ax}{(x^2+3a)^2}}$$

הביטוי $8ax$ **מתאפס עבור** $x=0$ **, וכיוון ש-** $a>0$ **חיובי עבור** $x>0$ **ושלילי עבור** $x<0$

תשובה:עלייה - $x>0$ **, ירידה** $x<0$

(3) בנקודת הפיתול הנגזרת השנייה מתאפסת,

כאשר אנו עוברים מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה, או להפך.

$$f''(x)=8a\cdot\frac{(x^2+3a)^2-2x(x^2+3a)\cdot 2x}{(x^2+3a)^4}$$

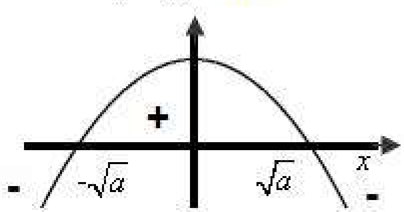
$$f''(x)=8a\cdot(x^2+3a)\cdot\frac{(x^2+3a-4x^2)}{(x^2+3a)^4}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{8a\cdot(x^2+3a)(3a-3x^2)}{(x^2+3a)^4}}$$

$$0=3a-3x^2 \quad /:3$$

$$x=\pm\sqrt{a} \quad \leftarrow a>0$$

סימני $f''(x)$



סימני הנגזרת השנייה, בהתאם לציור משמאל

כאשר $\frac{8a\cdot(x^2+3a)}{(x^2+3a)^4}$ **ביטוי חיובי לכל** x **,**

ועבור $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$ **הפונקציה משנה תחומי קעירות ובהתאם אלו שיעורי ה-** x **של נקודות הפיתול.**

תשובה: $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$

(4) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1}$$

$$0=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1 \quad /\cdot(x^2+3a)$$

$$0=x^2-a-x^2-3a$$

$$a=0$$

אין חיתוך עם ציר ה- x **כי** $a>0$ **.**

נקודת חיתוך עם ציר ה- y $\quad f(0)=\frac{0^2-a}{0^2+3a}-1=-1\frac{1}{3}$

תשובה: $(0,-1\frac{1}{3})$

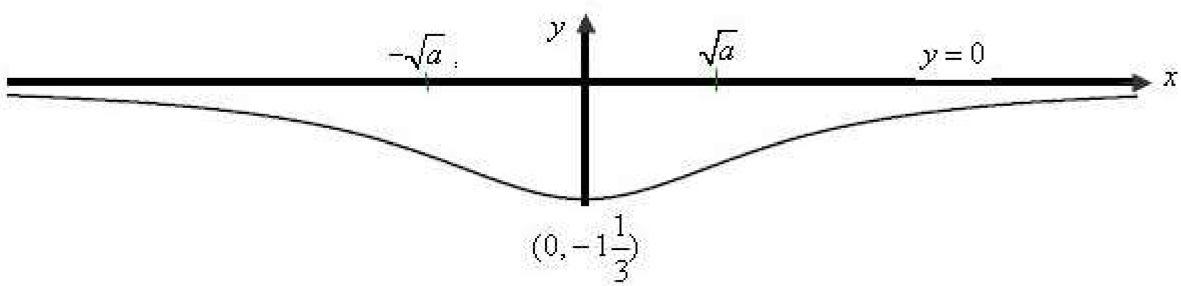
(5) נמצא אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{3a}{x^2}}-1=1-1=0$ **, לכן** $y=0$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** y

הפונקציה מוגדרת לכל x **ואין אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** x **.**

תשובה: $y=0$

ב. סרטוט גרף הפונקציה עבור $a>0$



ג. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$ **,** $a<0$

במקרה זה הביטוי x^2+3a **יכול להתאפס:** $x^2+3a\neq 0 \quad \to x^2\neq -3a \quad \to x\neq \pm\sqrt{-3a}$

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x\neq \pm\sqrt{-3a}$

(2) $f''(x)=\frac{8a\cdot(x^2+3a)(3a-3x^2)}{(x^2+3a)^4}$ **,** $a<0$

כאשר (x^2+3a) **לא מתאפס בתחום ההגדרה, ו-** $3a-3x^2$ **שלילי לכל** x **עבור** $a<0$ **.**

תשובה: אין נקודות פיתול

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונות הפונקציות $f(x)=\sqrt{-x-4}$ **,** $g(x)=-\sqrt{x-4}$

תחום ההגדרה של $f(x)=\sqrt{-x-4}$ **:** $\boxed{x\le -4} \leftarrow -x\ge 4 \leftarrow -x-4\ge 0$

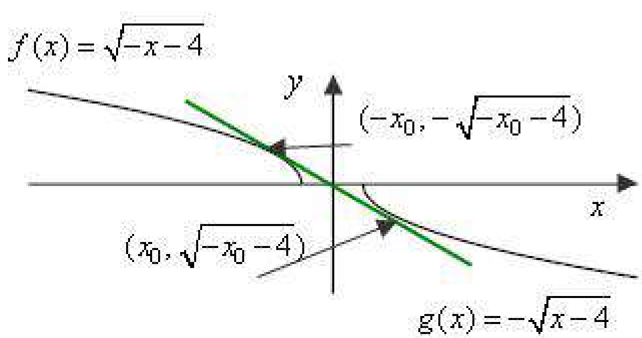
תחום ההגדרה של $g(x)=-\sqrt{x-4}$ **:** $\boxed{x\ge 4} \leftarrow x-4\ge 0$

ב. (1) $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x-4}}$

לכן שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=x_0$ **הוא** $m=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$

$g'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x-4}}$ **כאשר יש למצוא את שיעור ה-** x **עבורו** $m=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$**.**

$$\frac{-1}{2\sqrt{x-4}}=\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$$
$$\sqrt{-x_0-4}=\sqrt{x-4}$$
$$-x_0-4=x-4$$
$$x=-x_0$$
$$g(-x_0)=-\sqrt{-x_0-4} \rightarrow \boxed{(-x_0,-\sqrt{-x_0-4})}$$



תשובה: שיעורי נקודת ההשקה של המשיק המשותף עם $g(x)=-\sqrt{x-4}$ **הם:** $(-x_0,-\sqrt{-x_0-4})$

(2) שיעורי נקודת ההשקה של המשיק המשותף עם $f(x)=\sqrt{-x-4}$ **הם:** $(x_0,\sqrt{-x_0-4})$

נשתמש בנוסחת שיפוע בין שתי נקודות:

$$\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}=\frac{-\sqrt{-x_0-4}-\sqrt{-x_0-4}}{-x_0-x_0}$$
$$\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}=\frac{\cancel{-2}\sqrt{-x_0-4}}{\cancel{-2}x_0}$$
$$-x_0=2(-x_0-4)$$
$$-x_0=-2x_0-8$$
$$x_0=-8 \rightarrow g(8)=-\sqrt{8-4}=-2 \rightarrow \boxed{(8,-2)}$$

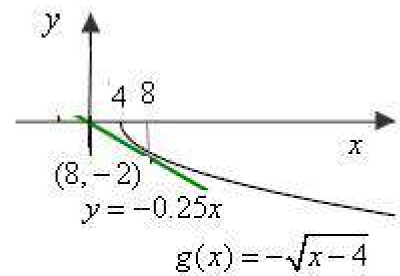
תשובה: $(8,-2)$

ג. הנוסחה לנפח גוף סיבוב היא $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

נמצא את משוואת המשיק העובר בנקודה $(8,-2)$ ושיפועו $m=\frac{-1}{2\sqrt{8-4}}=-0.25$

$$y+2=-0.25(x-8)$$
$$y=-0.25x$$

והמשיק עובר בראשית הצירים.



נחשב את V_1 - נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב השטח בין המשיק עם ציר ה- x (מנקודת ההשקה לראשית

ונפחית ממנו את V_2 - נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב השטח בין $g(x)=-\sqrt{x-4}$ עם ציר ה- x,

מנקודת ההשקה לנקודה $(4,0)$

$$V_1=\pi\int_0^8\left[(-0.25x)^2\right]dx=$$
$$V_1=\pi\int_0^8\left[0.0625x^2\right]dx=$$
$$V_1=\pi\left(\frac{0.0625x^3}{3}\right]_0^8$$
$$V_1=\pi\left(\left(\frac{0.0625\cdot 8^3}{3}\right)-\left(\frac{0.0625\cdot 0^3}{3}\right)\right)$$
$$V_1=10\frac{2}{3}\pi$$

$$V_2=\pi\int_4^8\left[((-\sqrt{x-4}))^2\right]dx=$$
$$V_2=\pi\int_4^8\left[x-4\right]dx=$$
$$V_2=\pi\left(\frac{x^2}{2}-4x\right]_4^8$$
$$V_2=\pi\left(\left(\frac{8^2}{2}-4\cdot 8\right)-\left(\frac{4^2}{2}-4\cdot 4\right)\right)$$
$$V_2=8\pi$$

ובהתאם: $V=V_1-V_2=10\frac{2}{3}\pi-8\pi=2\frac{2}{3}\pi$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $2\frac{2}{3}\pi$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\tan^2 x$ **בתחום** $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ **.**

נשים לב לכך שהפונקציה זוגית ואי-שלילית.

(1) נמצא את שיעורי ה- x **שעבורם הפונקציה** $f(x)$ **אינה מוגדרת , כלומר** $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$

ועבור $k=-2,-1,0,1$ **נקבל ש-** $f(x)$ **אינה מוגדרת בתחום, עבור** $x=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=-\frac{3\pi}{2}$

תשובה: $x=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=-\frac{3\pi}{2}$

(2) תשובה:האסימפטוטות אנכיות: $x=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=-\frac{3\pi}{2}$

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון

לא קיימות נקודות קצה, עקב תחום ההגדרה: $x\ne\frac{\pi}{2}, x\ne-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}<x<-\frac{3\pi}{2}$

$$\boxed{f(x)=2\tan^2 x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4\tan x}{\cos^2 x}}$$

$$0=\tan x \quad \to x=\pi k \quad \to k=-1,0,1 \quad \to x=-\pi,0,\pi$$

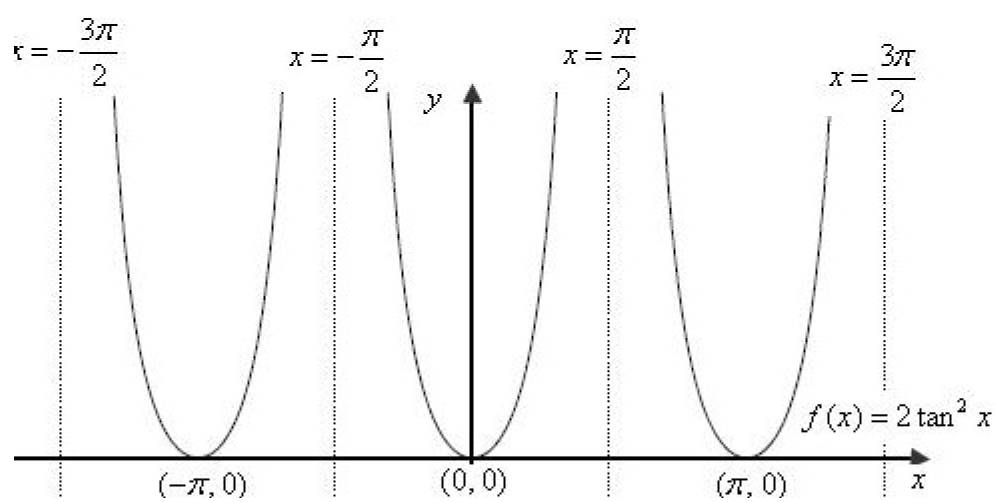
$$f(-\pi)=0,\ f(-\pi)=0,\ f(\pi)=0$$

$$f''(mone)=\frac{1}{\cos^2 x}>0 \quad \to Min$$

השימוש בנגזרת שנייה לקביעת סימן הקיצון אפשרי, כי מכנה $f'(x)$ **חיובי ו -** $f'(x)=0$

תשובה: $(\pi,0)$, $(0,0)$, $(-\pi,0)$ **מינימום**

(4) הסקיצה המתאימה



נכתב ע"י עפר ילין

ב. (1) נמצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה $g(x)=\tan x - x$.

$$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$

$$g'(x)=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$g'(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{g'(x)=\tan^2 x}$$

תשובה: $g'(x)=\tan^2 x$

(2) נחשב את השטח המבוקש, תוך חלוקתו לשני שטחים כמתואר בציור.

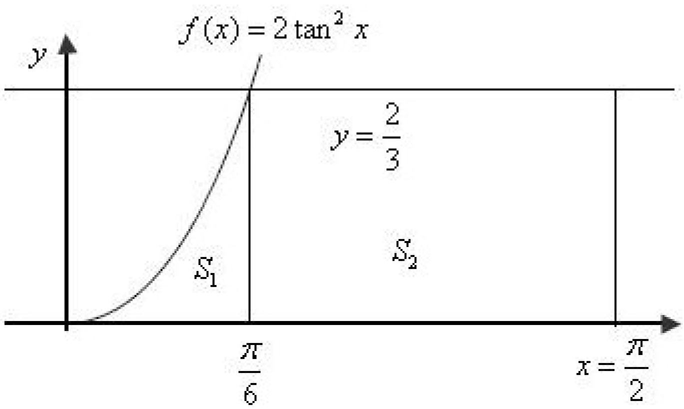
$$2\tan^2 x=\frac{2}{3} \quad \rightarrow \tan^2 x=\frac{1}{3}$$

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$$

ועבור $k=0$ **נקבל ששיעור ה-** x **של נקודת החיתוך, בתחום הנתון, הוא** $\frac{\pi}{6}$.

$S_2=\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=\frac{2\pi}{9}$ **(שטח מלבן)**



$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\tan^2 x-0)\,dx$$

$$S_1=2(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$S_1=2((\tan\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})-(\tan 0-\tan 0))$$

$$S_1=2(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6})-(0)$$

$$\boxed{S_1=0.1075}$$

$$S=\frac{2\pi}{9}+0.1075=0.8056$$

תשובה: גודל השטח 0.8056 **יח"ר**