נסמן ב- x את מהירות המשאית שיצאה מעיר A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות המכונית שיצאה מעיר B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק מעיר A לעיר B (ק"מ). נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
עד מפגש ראשון	משאית	2	x	$2x$
	מכונית	2	y	$2y$
ממפגש ראשון עד מפגש שני	משאית	$2\frac{2}{3}$	x	$2\frac{2}{3}x$
	מכונית	$2\frac{2}{3}$	y	$2\frac{2}{3}y$
מיציאה עד מפגש שלישי	משאית	$\frac{s-40}{x}$	x	$s-40$ **עד 40 ק"מ מעיר B**
	מכונית	$\frac{2s+40}{y}$	y	$2s+40$ **הלוך ושוב, ועוד 40 ק"מ**

עד המפגש הראשון עברו שני כלי הרכב את כל הדרך: $2x+2y=s$.

מהמפגש הראשון עד המפגש השני עברה המכונית

(עד עיר A) את המרחק שעברה המשאית מתחילת התנועה עד המפגש הראשון (הלוך ושוב),

וגם את המרחק (מעיר A) שעברה המשאית מהתחלה עד המפגש השני : $2\frac{2}{3}y=2x+2x+2\frac{2}{3}x$.

הזמנים שעברו שני כלי הרכב מיציאה עד למפגש שלישי, 40 ק"מ מעיר B, שווים $\frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y}$

$$\begin{cases} (1) \quad 2x+2y=s \\ (2) \quad 2\frac{2}{3}y=4x+2\frac{2}{3}x \quad \to y=2.5x \\ (3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y} \end{cases}$$

$$(2),(3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{2.5x} \quad / \cdot 2.5x$$

$$2.5s-100=2s+40$$

$$0.5s=140$$

$$\boxed{s=280}$$

$$(1),(2)\ 2x+2\cdot 2.5x=280$$

$$7x=280$$

$$\boxed{x=40} \quad \boxed{y=100}$$

תשובה: מהירות המשאית 40 קמ"ש.

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)=1$ **אגף שמאל:** $S_1=a_1=1$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $S_1+S_2+S_3+...+S_k=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ **,**

כאשר : $S_{k+1}=\frac{(k+1)[2\cdot 1+2(k+1-1)]}{2}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**.**

נתון כי $d=2$ $a_1=1,$ **ולכן** $S_{k+1}=\frac{(k+1)[2\cdot 1+2(k+1-1)]}{2}=(k+1)^2$

צ"ל :

$$\underbrace{S_1+S_2+S_3+...+S_k}_{\downarrow}+S_{k+1}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$ **, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**
אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

פרוק הביטוי $2k^2+7k+6$ **ע"י משוואה ריבועית:**

$$2k^2+7k+6=0$$

$$k_{1,2}=\frac{-7\pm 1}{4} \quad \rightarrow k=-2,-\frac{3}{2}$$

$$2(k+2)(k+\frac{3}{2})$$

$$(k+2)(2k+3)$$

הסדרה מקיימת לכל n **טבעי את כלל הנסיגה:** $b_{n+1}=\frac{b_n}{b_n-1}$ **.**

כאשר נתון כי $b_{19}+b_{20}=4.5$ **.**

על פי כלל הנסיגה $b_{20}=\frac{b_{19}}{b_{19}-1}$ **.**

נסמן: $b_{19}=t$

$$t+\frac{t}{t-1}=4.5$$
$$t(t-1)+t=4.5(t-1)$$
$$t^2-t+t=4.5t-4.5$$
$$t^2-4.5t+4.5=0$$
$$t_{1,2}=\frac{4.5\pm1.5}{2}$$
$$t=3 \quad \to b_{19}=3 \quad \to b_{20}=1.5$$
$$t=1.5 \quad \to \cancel{b_{19}=1.5} \quad \leftarrow b_{19}>2$$

קבלנו ש- $b_{20}=1.5$ **ומכיוון ונתון כי** $b_{n+2}=b_n$ **, הרי שגם** $b_{10}=1.5$

(למעשה, סדרת האיברים במקומות הזוגיים, או האי זוגיים, בסדרה הנתונה – היא קבועה)

תשובה: $b_{10}=1.5$

א. נגדיר את המאורעות:

S - **הנסקרים** A - **צעירים** $\overline{A}$ - **מבוגרים**

B - **הצהירו שיקנו טלפון חדשני** $\overline{B}$ - **הצהירו שלא יקנו טלפון חדשני**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(B/\overline{A}) = 0.5 \quad \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.5$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{2}{3} \quad \rightarrow P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.2$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{0.2}{P(\overline{B})}$$

$$\boxed{P(\overline{B}) = 0.3}$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.5 = \frac{0.1}{P(\overline{A})}$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 0.2}$$

<u>נציב בטבלה ונשלים נתונים</u>

	A צעירים	$\overline{A}$ מבוגרים	
B - **יקנו**	0.6	0.1	0.7
$\overline{B}$ - **לא יקנו**	0.2	0.1	0.3
	0.8	0.2	1

בסקר השתתפו $2,000$ **איש, כלומר** $N(S) = 2,000$

$$N(A) = P(A) \cdot N(S)$$

$$N(A) = 0.8 \cdot 2,000 = 1,600$$

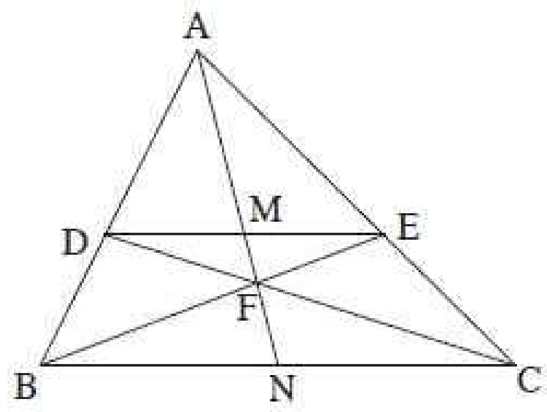
תשובה: $1,600$ **צעירים השתתפו בסקר.**

ב. נמצא כמה צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

$$N(B/A) = P(B/A) \cdot N(A) = 0.75 \cdot 1,600 = 1,200$$

תשובה: $1,200$ **צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.**



עב ינואר 12 מועד חורף שאלון 35806

<u>נתונים</u>

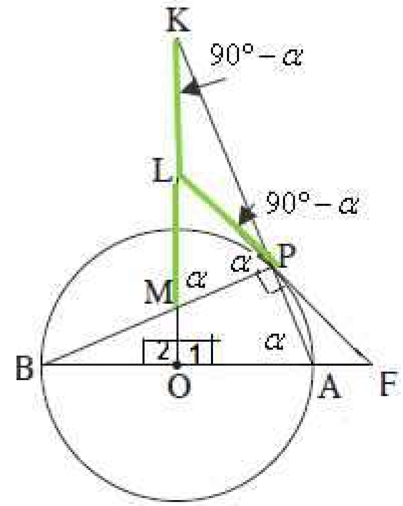
1. $DE \parallel BC$

צ"ל: א. $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$

ב. $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$

ג. $DM = EM$ **,** $BN = CN$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	2	$DE \parallel BC$	נתון
2	3	$\frac{DM}{BN} = \frac{AM}{AN}$	משפט תאלס הרחבה 1
2	4	$\frac{AM}{AN} = \frac{EM}{CN}$	משפט תאלס הרחבה 1
3, 4	5	$\boxed{\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}}$	כלל המעבר
מ.ש.ל. א			
2	6	$\frac{EM}{BN} = \frac{MF}{FN}$	משפט תאלס הרחבה 2
2	7	$\frac{MF}{FN} = \frac{DM}{CN}$	משפט תאלס הרחבה 2
6, 7	8	$\boxed{\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}}$	כלל המעבר
מ.ש.ל. ב			
5	9	$\frac{DM}{EM} = \frac{BN}{CN}$	חישוב לפי כללי פרופורציה – יחס המונים הוא כיחס המכנים
8	10	$\frac{DM}{EM} = \frac{CN}{BN}$	חישוב לפי כללי פרופורציה – יחס המונים הוא כיחס המכנים
9, 10	11	$\frac{BN}{CN} = \frac{CN}{BN}$	כלל מעבר
11	12	$\boxed{BN = CN}$	חישוב
10, 12	13	$\boxed{EM = DM}$	הצבה וחישוב
מ.ש.ל. ג			



<u>נתונים</u>

1. AB **קוטר במעגל שמרכזו** O **.2** $O_1 = O_2 = 90°$

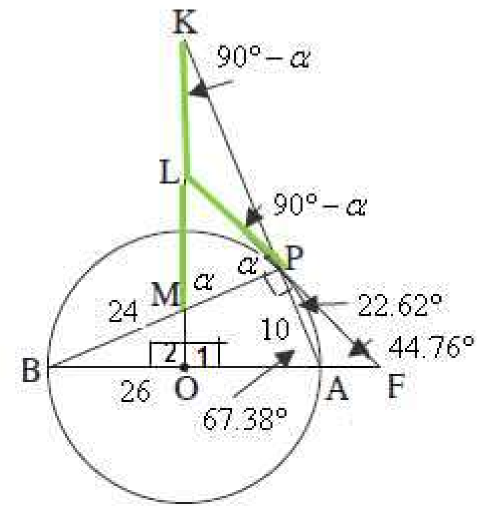
3. LF **משיק למעגל בנקודה** P.

עבור ב: 4. $BP = 24$ **ס"מ 5. רדיוס המעגל** 13 **ס"מ**

צ"ל: א. $KL = LM$ **ב.** AF

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	6	$O_1 = O_2 = 90°$	נתון
1	7	AB קוטר במעגל שמרכזו O	נתון
7	8	$\sphericalangle APB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
3	9	LF משיק למעגל בנקודה P	נתון
8	10	$\sphericalangle KPM = 90°$	זוויות צמודות משלימות ל $180°$
	11	$\sphericalangle PAB = \alpha$	סימון
11 ,6	12	$\sphericalangle K = 90° - \alpha$	סכום זוויות ΔAKO $180°$
12 ,10	13	$\sphericalangle KMP = \alpha$	סכום זוויות ΔKPM $180°$
11 ,9	14	$\sphericalangle LPM = \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו השני וכלל המעבר
14 ,13	15	$\sphericalangle KMP = \sphericalangle LPM$	כלל המעבר
15	16	$LP = LM$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔLPM
14 ,10	17	$\sphericalangle KPL = 90° - \alpha$	הפרש זוויות
17 ,12	18	$\sphericalangle KPL = \sphericalangle K$	כלל המעבר
18	19	$LP = LK$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔKLP
19 ,16	20	$KL = LM$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א	

ונעבור לטריגונומטריה לסעיף ב



$BP = 24$ ס"מ (נתון)

רדיוס המעגל 13 ס"מ (נתון) ולכן אורך הקוטר $BA = 26$ ס"מ

$AP = 10$ ס"מ (משפט פיתגורס ΔBAP)

מציאת ערך α ב- ΔBAP

$$\tan\alpha = \frac{24}{10}$$

$$\alpha = 67.38°$$

$\sphericalangle FPA = 90° - \alpha = 90 - 67.38 = 22.62°$ **(זווית שטוחה משלימה ל $180°$)**

$\sphericalangle F = 44.76°$ **(α זווית חיצונית למשולש ΔFAP שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה)**

משפט סינוסים ΔFPA

$$\frac{AF}{\sin\sphericalangle FPA} = \frac{AP}{\sin\sphericalangle F}$$

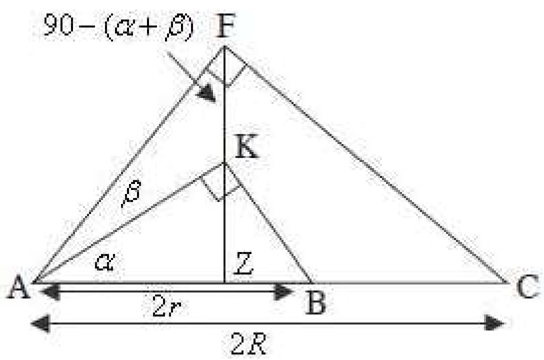
$$\frac{AF}{\sin 22.62°} = \frac{10}{\sin 44.76°}$$

$$\boxed{AF = 5.462}$$

תשובה: $AF = 5.462$ ס"מ

א. (1) שני המשולשים ΔAKB **ו-** ΔAFC **ישרי זווית.,**

לכן $AC=2R$ **ו-** $AB=2r$ **(קוטר נשען על זווית היקפית ישרה)**



<u>ΔAKZ</u> **:** $\cos\alpha=\dfrac{AZ}{AK}$

<u>ΔAFZ</u> **:** $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{AZ}{AF}$

וע"י חילוק המשוואות נקבל $\dfrac{AF}{AK}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

תשובה: $\dfrac{AF}{AK}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

(2) <u>ΔAKB</u> **:** $\cos\alpha=\dfrac{AK}{2r}$

<u>ΔAFC</u> **:** $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{AF}{2R}$

וע"י חילוק המשוואות נקבל $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\dfrac{AF}{AK}\cdot\dfrac{r}{R}$

נציב על פי (1) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\dfrac{r}{R}$ **ונקבל :** $\dfrac{R}{r}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$

תשובה: $\dfrac{R}{r}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$

ב. משפט סינוסים <u>ΔAKF</u> **, כאשר** t **רדיוס המעגל החוסם משולש זה.**

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ-(\alpha+\beta))}=2t$$

$$\frac{2r\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)}=t$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}}\cdot r=t$$

$$\boxed{t=\sqrt{R}\sqrt{r}} \quad \leftarrow r>0$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את ΔAKF **הוא** $\sqrt{R}\sqrt{r}$ **יחידות.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0

$\sqrt{2x}-2\neq 0$ **, לכן** $x\neq 2$ **וגם** $2x\geq 0$ **ובהתאם** $x\geq 0$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\geq 0,\ x\neq 2$ **.**

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}} \quad \leftarrow x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=+\infty \quad ,\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=-\infty \quad \to \boxed{x=2}$$

תשובה: אסימפטוטה אנכית: $x=2$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

(3) בנקודת חיתוך עם ציר y **מתקיים, כי** $x=0$ **ונקודת החיתוך היא** $(0,0)$ **.**

זו גם נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- x

תשובה: $(0,0)$ **.**

(4) $(0,0)$ **היא נקודת קצה, ולכן תהיה גם נקודת קיצון.**

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}-2-\frac{2x}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}-2-0.5\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x}-2)^2} \quad \leftarrow x>0$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{0.5\sqrt{2x}-2}{(\sqrt{2x}-2)^2}} \quad \leftarrow x>0$$

$$0=0.5\sqrt{2x}-2$$

$$4=\sqrt{2x}$$

$$2x=16$$

$$x=8 \quad \to 4=\sqrt{2\cdot 8} \quad \to 4=4 \quad \to o.k.$$

$$f(8)=\frac{8}{\sqrt{2\cdot 8}-2}=4 \quad \to (8,4)$$

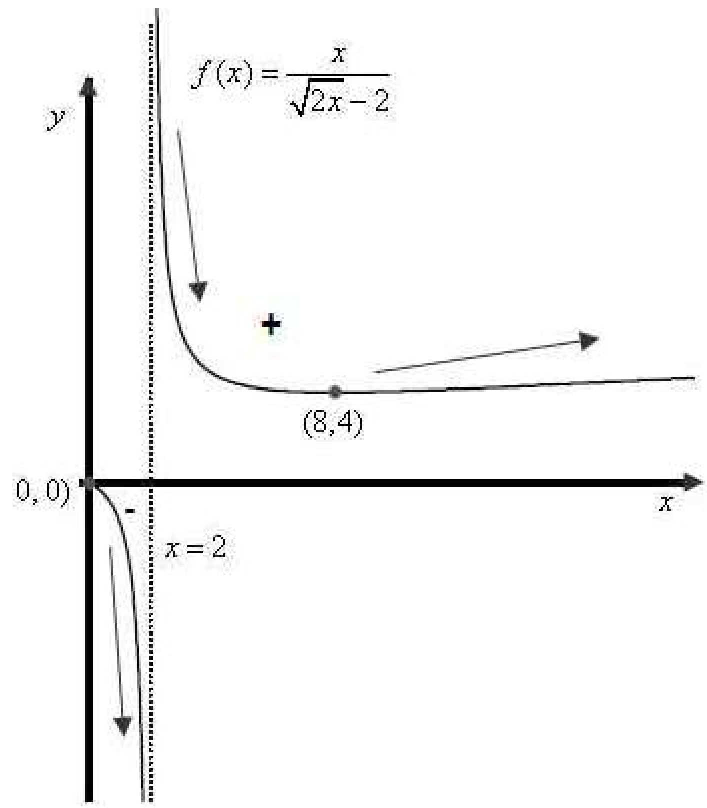
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}-2}=-1,\quad f(7)=\frac{7}{\sqrt{2\cdot 7}-2}=4.02,\quad f(1)=\frac{9}{\sqrt{2\cdot 9}-2}=4.01$$

x	0	1	2	7	8	9
$f(x)$	0	-1		4.02	4	4.01
$f'(x)$						
מסקנה	Max	↘		↘	Min	↗

תשובה: $(0,0)$ **מקסימום ,** $(8,4)$ **מינימום**.

(5) הסקיצה המתאימה (כולל סימונים עבור סעיף ב):



ב. נתון כי $g'(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **, כאשר** $g(x)$ **מוגדרת בתחום ההגדרה של** $f(x)$ **.**

$g(x)$ **יורדת כאשר** $g'(x)<0$ **, כלומר כאשר** $f(x), f'(x)$ **שוני סימן.**

על פי טבלת עלייה וירידה, וגם הסקיצה של $f(x)$ **, זה מתקיים עבור** $2<x<8$ **,**

כאשר $f(x)$ **חיובית, אולם יורדת (כלומר** $f'(x)<0$ **).**

תשובה: $2<x<8$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}$ **בתחום** $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$ **.**

הפונקציה מוגדרת בכל התחום $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$**, על פי הנתון.**

מכנה הפונקציה חיובי, לכן סימן הפונקציה נקבע על ידי המונה.

$a>0$ **לכן** $-a<0$ **ומכאן שכאשר** $\cos x>0$ **הפונקציה שלילית, וכאשר** $\cos x<0$ **הפונקציה חיובית.**

(1) $f(x)>0$ **עבור** $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{7\pi}{6}$**.**

(2) $f(x)<0$ **עבור** $-\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$**.**

ב. נחשב את האינטגרל המסוים $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx$

נשים לב כי $(16\sin x+9)'=16\cos x$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=$$

$$-2a\sqrt{16\sin x+9}\,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=$$

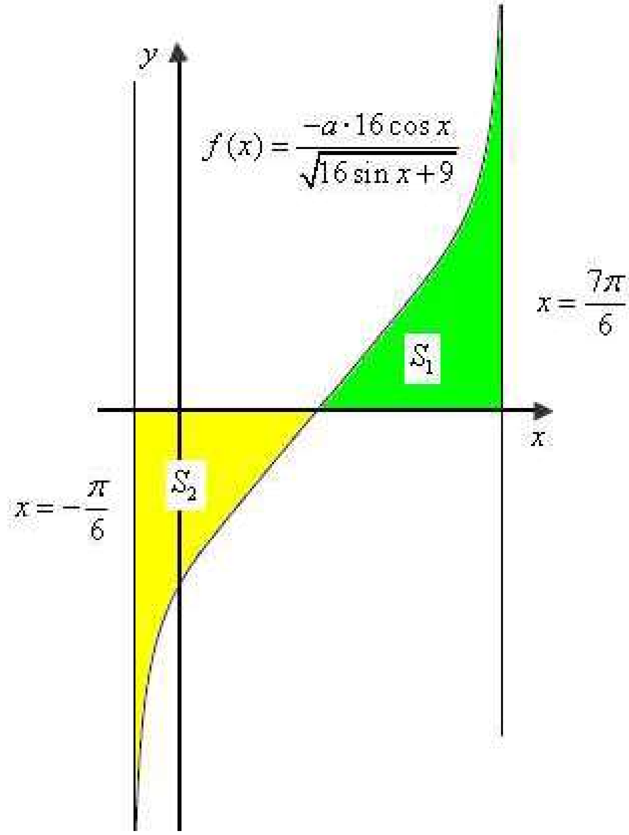
$$-2a\left(\sqrt{16\sin\frac{7\pi}{6}+9}-\sqrt{16\sin(-\frac{\pi}{6})+9}\right)=$$

$$-2a(1-1)=0$$

תשובה: ערך האינטגרל המסוים הוא 0 **.**

ג. נצייר את הסקיצה המתאימה של $f(x)$, על פי תחומי החיוביות והשליליות הנתונים,

כולל סימון הישרים: $x=\frac{7\pi}{6},\quad x=-\frac{\pi}{6}$ **.**



כיוון שהראינו כי $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=0$ **, הרי ש-** $S_1=S_2$ **.**

גודל השטח הכולל הוא 8**, לכן** $S_1=S_2=4$ **.**

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=$$

$$S_1=-2a\sqrt{16\sin x+9}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

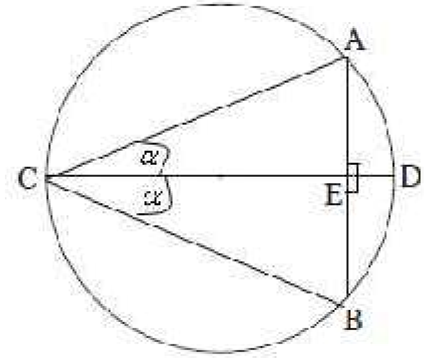
$$S_1=-2a\left(\sqrt{16\sin\frac{7\pi}{6}+9}-\sqrt{16\sin(\frac{\pi}{2})+9}\right)$$

$$S_1=-2a(1-5)$$

$$S_1=8a$$

לכן, $8a=4$ **ו-** $a=0.5$ **.**

תשובה: $a=0.5$



הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח המשולש* ABC.

CD הוא קוטר, שאורכו נתון $2R$, המאונך למיתר AB, ולכן חוצה את הקשת $\overset{\frown}{AB}$.

(אם ישר עובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר אז הוא חוצה את הקשת שהמיתר נשען עליה)

נסמן את $\sphericalangle ACD$ ב- α ולכן $\sphericalangle BCD=\alpha$ (על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות).

ב: ΔACD נקבל: $AC=2R\cos\alpha$

ולכן: $S(\alpha)=\dfrac{(2R\cos\alpha)^2\sin 2\alpha}{2} \leftarrow \boxed{S(\alpha)=2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha}$

$$S'(\alpha)=2R^2(2\cos\alpha(-\sin\alpha)\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha\cos 2\alpha)$$
$$S'(\alpha)=2R^2(2\cos\alpha\left[-\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos\alpha\cos 2\alpha\right])$$
$$\boxed{S'(\alpha)=4R^2\cos\alpha\cos 3\alpha}$$
$$\cancel{0=\cos\alpha} \quad \leftarrow 0<\alpha<90°$$
$$0=\cos 3\alpha$$
$$3\alpha=90°+180°k$$
$$\alpha=30°+60°k$$
$$\alpha=30° \quad \leftarrow 0<\alpha<90°$$
$$\left.\begin{array}{l} S'(\frac{\pi}{7})=4R^2\cos\frac{\pi}{7}\cos 3\cdot\frac{\pi}{7}=0.8R^2>0 \\ S'(\frac{\pi}{5})=4R^2\cos\frac{\pi}{5}\cos 3\cdot\frac{\pi}{5}=-R^2<0 \end{array}\right\} \max$$

קבלנו ש ΔABC הוא בעל שטח מקסימלי כאשר הוא שווה צלעות.

$$S=2R^2\cos^2 30°\sin 60$$
$$S=2R^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\boxed{S=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}$$

תשובה: השטח המקסימלי של ΔABC הוא $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ יח"ר.