נסמן ב- v את המהירות של דן מתל אביב לכיוון הרצליה (קמ"ש, קבועה)

ובהתאם $v+2$ היא מהירותה של אילנית מתל אביב עד הרצליה.

נסמן ב- t את זמן הרכיבה של דן מתל אביב לכיוון הרצליה (שעות)

ובהתאם $t-0.5$ הוא זמן הרכיבה של אילנית עד שנפגשה עם דן, בדרך להרצליה.

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
עד המפגש	דן	t	v	vt
	אילנית	$t-0.5$	$v+2$	$(v+2)(t-0.5)$
מהמפגש עד הרצליה	אילנית	0.5	$v+2$	$0.5(v+2)$

עד המפגש עברו שני הרוכבים את אותו מרחק: $vt=(v+2)(t-0.5)$.

מסלול הרכיבה שעברה אילנית, מתל אביב עד הרצליה, הוא $9<t(v+2)<25$

נבודד את t מהמשוואה הראשונה:

$$vt=(v+2)(t-0.5)$$
$$vt=vt-0.5v+2t-1$$
$$2t=0.5v+1$$
$$\boxed{t=0.25v+0.5}$$

נציב באי-שוויון $9<(0.25v+0.5)(v+2)<25 \leftarrow 9<0.25v^2+v+1<25$

$$0.25v^2+v+1<25$$
$$0.25v^2+v-24<0$$
$$v_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{0.5} \quad \to v=8,-12$$

נקבל פרבולה בעלת מינימום,

ובמגבלות תחום הבעיה $v>0$

פתרונה $0<v<8$

$$0.25v^2+v+1>9$$
$$0.25v^2+v-8>0$$
$$v_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{0.5} \quad \to v=4,-8$$

נקבל פרבולה בעלת מינימום,

ובמגבלות תחום הבעיה $v>0$

פתרונה $v>4$

חיתוך הפתרונות הוא $4<v<8$ **.**

תשובה: המהירות v נמצאת בתחום המספרים $(4,8)$, או 8 קמ"ש $< v <$ 4 קמ"ש.

א. (1) $1^2+2^2+3^2+...+n^2 \square (1+2+3+...+n)^2$

נציב $n=1$ **ונקבל** $1=1$.

נציב $n=2$ **ונקבל** $5<9$.

תשובה: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 \boxed{\le} (1+2+3+...+n)^2$

(2) 1. הטענה נכונה עבור $n=1$**, על פי תת הסעיף הקודם.**

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^2+2^2+3^2+...+k^2 \le (1+2+3+...+k)^2$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2 \le (1+2+3+...+k+k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+2+3+...+k)^2+(k+1)^2 \le \boxed{(1+2+3+...+k)^2}+2(1+2+3+...+k)(k+1)+\boxed{(k+1)^2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הגדול ממנו,

לכן, די אם נוכיח את האי שוויון שהתקבל.

סכום הביטויים שבמסגרות שווה לביטוי באגף ימין,

וכן $2(1+2+3+...+k)(k+1)$ **הוא ביטוי חיובי לכל** k **טבעי.**

מתקבל שאגף שמאל קטן מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

נתונה הסדרה החשבונית, שאיבריה הם $58, 62, 66, ..., (4n+6)$

נסמן את מספר איברי הסדרה ב- k **(כי הביטוי האלגברי** n **תפוס...)**

לכן: $a_1 = 58, \quad d = 4, \quad a_k = 4n+6$

ניעזר בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$4n+6 = 58 + (k-1)\cdot 4$$
$$4n+6 = 58 + 4k - 4$$
$$4n - 48 = 4k$$
$$\boxed{k = n-12} \quad o.k. \leftarrow n-12 > 0$$

ניעזר בנוסחת סכום של סדרה חשבונית.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$S_{n-12} = \frac{(n-12)(58+4n+6)}{2}$$
$$S_{n-12} = (n-12)(2n+32)$$
$$S_{n-12} = 2n^2 + 8n - 384$$

תשובה: סכום הסדרה הוא $2n^2 + 8n - 384$ **.**

א. ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב- 3 בהטלת קובייה מאוזנת הוא $\frac{1}{3}$, כי יש שני מספרים כאלה, 3 ו- 6.

נשים לב שאישה שנבחרה אינה חוזרת לחדר.

המשוואה המתאימה היא : $\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{2k}\cdot\frac{k-1}{2k-1}=\frac{15}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{k}{4k}\cdot\frac{k-1}{4k-1}$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{2k}\cdot\frac{k-1}{2k-1}=\frac{15}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{k}{4k}\cdot\frac{k-1}{4k-1}\quad /:k-1>0$$

$$\frac{1}{6(2k-1)}=\frac{5}{14(4k-1)}\quad /\cdot 42(2k-1)(4k-1)$$

$$7(4k-1)=15(2k-1)$$

$$28k-7=30k-15$$

$$\boxed{k=4}$$

תשובה: $k=4$.

ב. נמצא את ההסתברות להוצאת שתי נשים באופן שתואר.

כאשר בחדר I 4 נשים ו- 4 גברים, ובחדר II 4 נשים ו- 12 גברים.

$$P(2\text{ women})=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}=\frac{11}{105}$$

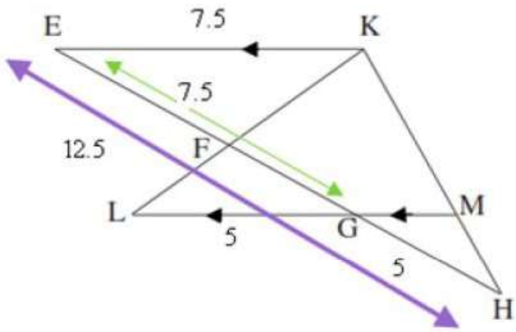
תשובה: ההסתברות היא $\frac{11}{105}$.

ג. יש למצוא ההסתברות שנבחרו בדיוק שני גברים מחדר I, אם ידוע שנבחר לפחות גבר אחד.

$$P(\text{שני גברים מחדר I} / \text{לפחות גבר אחד})=\frac{P(\text{שני גברים מחדר I}\cap\text{לפחות גבר אחד})}{P(\text{לפחות גבר אחד})}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}}{1-\frac{11}{105}}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{94}{105}}=\frac{15}{188}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{15}{188}$.



נתונים

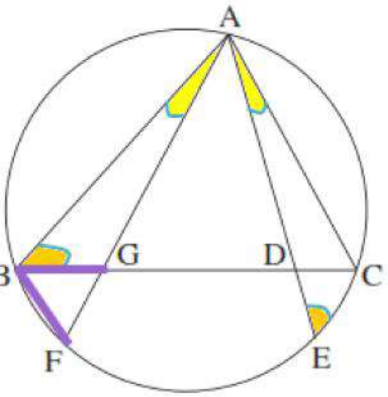
1. $GM \parallel EK$ **2.** $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$

עבור ב. 3. $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$ **4.** $EH = 12.5$ **ס"מ** **5.** $LG = 5$ **ס"מ**

צ"ל: א. $\Delta KHE \sim \Delta FLG$ **ב. (1)** EK **(2) ב.** $\frac{MH}{KH}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$GM \parallel EK$	**נתון**
6	7	$\sphericalangle E = \sphericalangle FGL$ **(ז)**	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
2	8	$\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$	**נתון**
8	9	$\sphericalangle HKE = 180° - \sphericalangle KML$	**זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל-** $180°$
	10	$\sphericalangle LFG = 180° - \sphericalangle KFH$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
8, 9, 10	11	$\sphericalangle LFG = \sphericalangle HKE$ **(ז)**	**הצבה**
7, 10	12	$\Delta KHE \sim \Delta FLG$	**משפט דמיון ז. ז.**
		מ.ש.ל. א	
12	13	$\frac{KH}{FL} = \frac{KE}{FG} = \frac{HE}{LG}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
4	14	$EH = 12.5$ **ס"מ**	**נתון**
5	15	$LG = 5$ **ס"מ**	**נתון**
3	16	$\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$	**נתון**
6	17	$\frac{EK}{LG} = \frac{3}{2}$	**משפט תאלס הרחבה 2 וכללי פרופורציה**
15 , 17	18	$EK = 7.5$ **ס"מ**	**חישוב**
		מ.ש.ל. ב (1)	
13, 14, 15	19	$\frac{KH}{FL} = \frac{KE}{FG} = \frac{HE}{LG} = \frac{5}{2}$	**הצבה וחישוב**
18, 19	20	$FG = 3$ **ס"מ**	**חישוב**
16, 20	21	$EG = 7.5$ **ס"מ**	**חישוב**
14, 21	22	$GH = 5$ **ס"מ**	**הפרש קטעים**
6, 14, 22	23	$\frac{MH}{KH} = \frac{5}{12.5}$ $\frac{MH}{KH} = \frac{2}{5}$	**משפט תאלס הרחבה 1**
		מ.ש.ל. ב (2)	

עג ינואר 13 מועד חורף שאלון 35806



נתונים

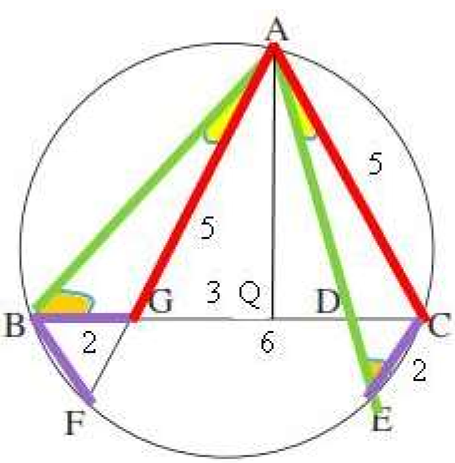
1. $BF = BG$ **2.** $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

עבור ב: 3. $CE =$ 2 **ס"מ** **4.** $AC =$ 5 **ס"מ** . **5.** $GC =$ 6 **ס"מ** .

צ"ל: א. $\Delta AGB \cong \Delta ACE$ **ב.** AE

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	6	$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$ (ז)	נתון
1	7	$BF = BG$	נתון
6	8	$BF = EC$	על זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים
7, 8	9	$EC = BG$ (צ)	כלל המעבר
	10	$\sphericalangle ABG = \sphericalangle AEC$ (ז)	על קשת שווה $(\overset{\frown}{AC})$ נשענות זוויות היקפיות שוות
6, 9, 10	11	$\Delta AGB \cong \Delta ACE$	משפט חפיפה זווית צלע זווית
		מ.ש.ל. א	

ונעבור לטריגונומטריה לסעיף ב'



נתון: 3. $CE =$ 2 **ס"מ** **4.** $AC =$ 5 **ס"מ** . **5.** $GC =$ 6 **ס"מ** .

על פי החפיפה, בסעיף א, נקבל ש $AG = AC = 5$ **,** $BG = CE = 2$ **ו-** $AB = AE$.

נוריד גובה AQ **לבסיס** GC **במשולש שווה השוקיים** AGC .

ולכן הוא גם תיכון, כלומר 3 **ס"מ** $= GQ$.

מציאת ערך $\cos\sphericalangle AGC$ **ב-** ΔAQG

$\cos\sphericalangle AGQ = \frac{3}{5} = 0.6$ **ובהתאם** $\cos\sphericalangle AGB = -0.6$

(כי זוויות צמודות משלימות ל- $180°$ **ו-** $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ **.)**

$\underline{\Delta ABG}$ **לפי משפט הקוסינוסים (נמצא את** AB **, השווה באורכו ל** AE **)**

$$(AB)^2 = (BG)^2 + (AG)^2 - 2BG \cdot AG \cdot \cos\sphericalangle AGB$$
$$(AB)^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-0.6)$$
$$AB = \sqrt{41} \quad \rightarrow \boxed{AE = \sqrt{41}}$$

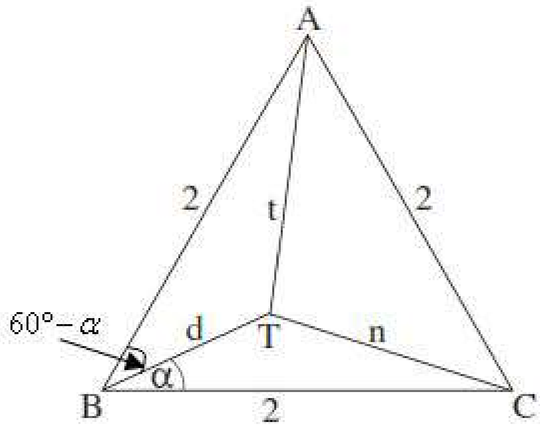
תשובה: $\sqrt{41}$ **ס"מ** $= AE$.

6

א. זוויות משולש ABC **שוות ל-** $60°$.

הזוויות שניתן לבטא באמצעות $\sphericalangle TBA = \alpha$ **ו-** $\sphericalangle ABT = 60° - \alpha$.

לכן נשתמש פעמיים במשפט הקוסינוסים במשולשים המתאימים.



$\underline{\Delta TBC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(TC)^2 = (BT)^2 + (BC)^2 - 2BT \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle TBC$$

$$n^2 = d^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - n^2 + 4}{4d}$$

$\underline{\Delta ABT}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(AT)^2 = (BA)^2 + (BT)^2 - 2BA \cdot BT \cdot \cos\sphericalangle ABT$$

$$t^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cdot \cos(60° - \alpha)$$

$$\cos(60° - \alpha) = \frac{d^2 - t^2 + 4}{4d}$$

נחסר את שתי המשוואות, על מנת לבטל את d^2 **ונשתמש בזהות, שבנוסחאון, ל-** $\cos\alpha - \cos\beta$

$$\cos\alpha - \cos(60° - \alpha) = \frac{d^2 - n^2 + 4 - (d^2 - t^2 + 4)}{4d}$$

$$-2\sin(30°)\sin(\alpha - 30°) = \frac{t^2 - n^2}{4d}$$

$$\boxed{\sin(\alpha - 30°) = \frac{n^2 - t^2}{4d}}$$

תשובה: הוּכַח.

ב. כיוון שלא ניתן למצוא בקלות זוויות במשולש ATC,

נחשב את שטחו באמצעות חיסור שטחי משולשים.

$$S_{\Delta ATC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ATB} - S_{\Delta BTC}$$

$$S_{\Delta ATC} = 0.5 \cdot 2^2 \sin(60°) - 0.5 \cdot 2 \cdot d \cdot \sin(60° - \alpha) - 0.5 \cdot 2 \cdot d \sin\alpha$$

$$\boxed{S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d \cdot (\sin(60° - \alpha) + \sin\alpha)}$$

$$S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d \cdot (2\sin 30° \cos(30° - \alpha)$$

$$\boxed{S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d\cos(30° - \alpha)}$$

תשובה: $S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d \cdot (\sin(60° - \alpha) + \sin\alpha)$ **או** $S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d\cos(30° - \alpha)$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6}{x^2+3a^2}$, $a>0$ **, פרמטר.**

(1) הביטוי שבמכנה הוא חיובי, כי הוא סכום של ביטוי אי שלילי, x^2 **, עם ביטוי חיובי,** $3a^2$ **(**$a>0$**)**

תשובה כל x

(2) חיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ואין פתרון , חיתוך עם ציר** y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,\frac{2}{a^2})$

תשובה: $(0,\frac{2}{a^2})$ **.**

(3) נחפש אסימפטוטות לפונקציה $f(x)$ **המאונכות לצירים.**

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{6}{x^2+3a^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3a^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{1+0}=0$ **, לכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

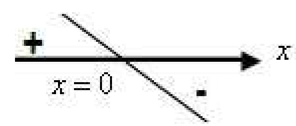
(4) נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן

$$\boxed{f'(x)=-\frac{12x}{(x^2+3a^2)^2}}$$

$$0=-12x$$

$$x=0 \quad \to (0,\frac{2}{a^2})$$

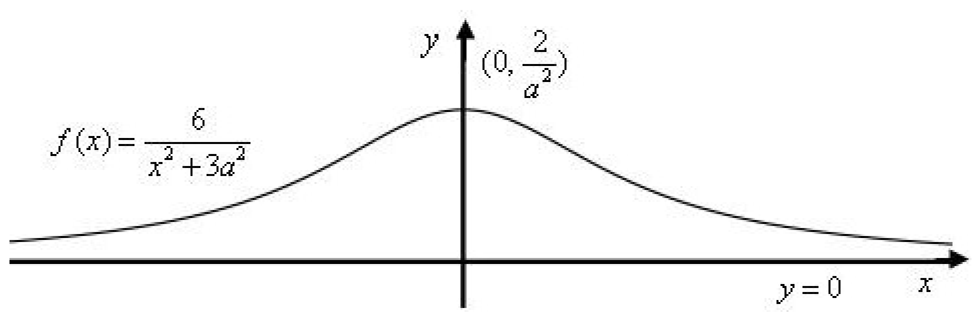
גרף סימני הנגזרת (מכנה חיובי)



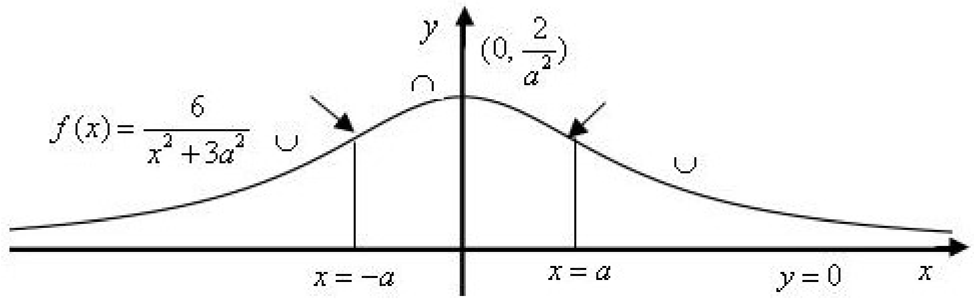
$x=0$ **עוברים מנגזרת חיובית לשלילית, כלומר מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $(0,\frac{2}{a^2})$ **מקסימום.**

ב. הסקיצה המתאימה:



ג. (1) להלן הסקיצה בה מסומנות נקודות הפיתול (שתי היחידות) ותחומי הקעירות.



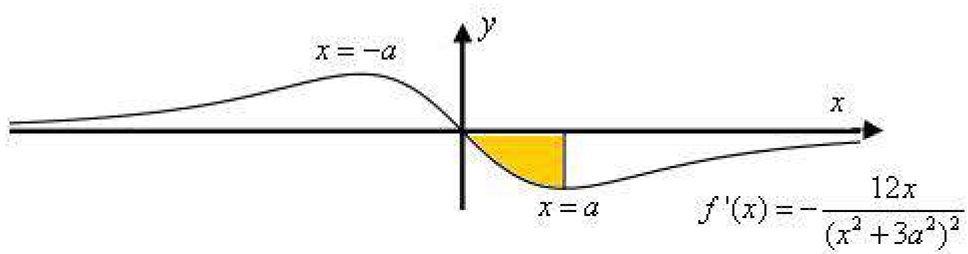
תשובה: $f''(x)$ **חיובית בתחומים:** $x>a$ **או** $x<-a$ **.** $f''(x)$ **שלילית בתחום** $-a<x<a$ **.**

(2) כאשר $x=a$ $f''(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות ולכן** $f'(x)$ **מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

כאשר $x=-a$ $f''(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות ולכן** $f'(x)$ **מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $x=a$ **מינימום ,** $x=-a$ **מקסימום.**

ד. ע"פ הסעיפים הקודמים ניתן לצייר את גרף הנגזרת.



$$S=\int_0^a (0-f'(x))dx = -f(x)\Big]_0^a = -f(a)+f(0) = \frac{-6}{4a^2}+\frac{2}{a^2} = \frac{1}{2a^2}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{1}{2a^2}$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x$ **בקטע** $0\le x\le 3\pi$.

(1) הפונקציה $\sin x$ **אי שלילית, בקטע הנתון, בתחומים** $0\le x\le \pi$ **או** $2\pi\le x\le 3\pi$.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $0\le x\le \pi$ **או** $2\pi\le x\le 3\pi$.

(2) נמצא תחילה את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור, ולאחר מכן נקודות קיצון פנימיות:

$$f(0)=-\sqrt{\sin 0}+0.5\sin 0=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$
$$f(\pi)=-\sqrt{\sin \pi}+0.5\sin \pi=0 \quad \rightarrow \boxed{(\pi,0)}$$
$$f(2\pi)=-\sqrt{\sin 2\pi}+0.5\sin 2\pi=0 \quad \rightarrow \boxed{(2\pi,0)}$$
$$f(3\pi)=-\sqrt{\sin 3\pi}+0.5\sin 3\pi=0 \quad \rightarrow \boxed{(3\pi,0)}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{2\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{2}\cos x$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\cos x(-1+\sqrt{\sin x})}{2\sqrt{\sin x}}}$$
$$\cos x=0 \qquad \sin x=1$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow f(\frac{\pi}{2})=-\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}+0.5\sin\frac{\pi}{2}=-0.5 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},-0.5)}$$
$$x=\frac{5\pi}{2} \quad \rightarrow f(\frac{5\pi}{2})=-\sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}}+0.5\sin\frac{5\pi}{2}=-0.5 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{5\pi}{2},-0.5)}$$

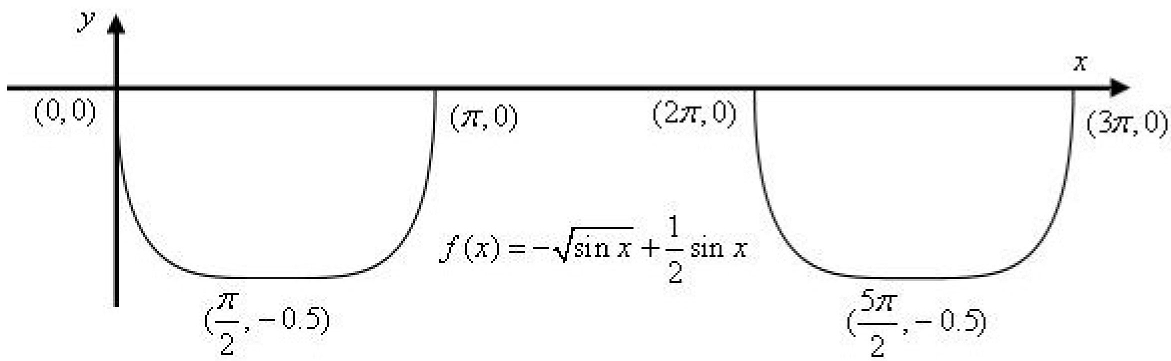
הפתרון $x=\frac{3\pi}{2}$ **שמתקבל עבור** $\cos x=0$ **אינו בתחום ההגדרה.**

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה,

0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π	x
0		-0.5		0		0		-0.5		0	$f(x)$
											$f'(x)$
Max	↘	**Min**	↗	**Max**		**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**	**מסקנה**

תשובה: $(\frac{\pi}{2},-0.5)$, $(\frac{5\pi}{2},-0.5)$ **מינימום** , $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$, $(3\pi,0)$ **מקסימום.**

ב. (1) הסקיצה המתאימה



(2) המשיק לפונקציה בשתי נקודות בדיוק עובר בנקודות המינימום, ולכן משוואתו $y=-0.5$ **.**

תשובה: $y=-0.5$

ג. האי שוויון $\frac{1}{2}\sin x>\sqrt{\sin x}$ **שקול לאי שוויון** $-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x>0$**, כלומר ל-** $f(x)>0$ **.**

על פי הסקיצה ניתן לראות שאין פתרון בקטע הנתון.

תשובה: אין ערכי x **עבורם מתקיים האי שוויון בקטע הנתון.**

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *סכום שטחי המעגל והריבוע.*

נסמן ב- r את רדיוס המעגל ולכן היקפו $2\pi r$.

מכאן שאורך החוט שנותר להיקף הריבוע הוא $k-2\pi r$ ובהתאם אורך צלע הריבוע $\frac{k-2\pi r}{4}$.

מכאן שסכום שטחי הצורות הוא :

$$S=\pi r^2+(\frac{k-2\pi r}{4})^2$$

$$\boxed{s=\pi r^2+\frac{1}{16}(k-2\pi r)^2}$$

נמצא נקודת קיצון.

$$S'(r)=2\pi r+\frac{1}{\cancel{16}\,4}\cdot\cancel{2}(k-2\pi r)(-\cancel{2}\pi)$$

$$S'(r)=\frac{8\pi r-\pi(k-2\pi r)}{4}$$

$$S'(r)=\frac{\pi}{4}(8r-k+2\pi r)$$

$$\boxed{S'(r)=\frac{\pi}{4}((8+2\pi)r-k)}$$

$$(8+2\pi)r-k=0$$

$$\boxed{r=\frac{k}{8+2\pi}}$$

$$\boxed{s''(r)=\frac{\pi}{4}(8+2\pi)}$$

$$s''(r)>0 \quad \rightarrow Min$$

עבור סכום השטחים המינימלי היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$

$$2\pi\cdot\frac{k}{8+2\pi}=\frac{5\pi}{\pi+4}$$

$$\frac{k}{\pi+4}=\frac{5}{\pi+4}$$

$$\boxed{k=5}$$

תשובה: $k=5$.