נסמן ב- v את מהירות הזרם מ- A ל- B (ובהתאם מהירות הרפסודה) (קמ"ש)

ובהתאם $15-v$ מהירות הסירה מנמל B לנמל A ו- $15+v$ בדרך חזרה.

נסמן ב- t את זמן ההפלגה של שני כלי השיט עד הגעתן המשותפת לנמל B (שעות) .

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
עד המפגש	רפסודה מ- A למפגש	5	v	$5v$
	סירה מ- B למפגש	5	$15-v$	$5(15-v)$
מהתחלה עד נמל B	רפסודה מ- A ל- B	t	v	tv
	סירה מ- B ל- A	$\frac{tv}{15-v}$	$15-v$	tv
	סירה מ- A ל- B	$\frac{tv}{15+v}$	$15+v$	tv

כלי השיט יצאו באותה שעה 9.00 בבוקר והגיעו באותה שעה, לכן המשוואה המתאימה:

$$t=\frac{tv}{15-v}+\frac{tv}{15+v} \quad /:t>5$$

$$(15-v)(15+v)=v(15+v)+\mathrm{v}(15-v)$$

$$225-v^2=15v+v^2+15v-v^2$$

$$v^2+30v-225=0$$

$$v_{1,2}=\frac{-30\pm\sqrt{1800}}{2}$$

$$v=6.213 \quad (v>0)$$

מהירות הזרם היא 6.213 קמ"ש, ובהתאם עברה הסירה מ- B למפגש: 43.93 ק"מ $= 5(15-6.213)$.

לכן, הרפסודה תעבור מרחק זה בזמן של 7.07 שעות $= 43.93/6.213$.

בהתאם, היא תגיע 12.07 שעות מיציאתה בשעה 9.00 מנמל A, ולכן תגיע לאחר השעה 9.00 בערב.

(בערך בשעה 9.04).

תשובה: הסירה והרפסודה לא יגיעו עד לשעה 9.00 בערב באותו היום .

א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ **, שמנתה** $-1<q<1$ **.**

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 **, לכן:** $\frac{a_2}{1-q}=6$ **ובהתאם:** $a_1q=6(1-q)$ **.**

נראה שהסדרה a_n^* **, בה הוחלפו סימני האיברים במקומות הזוגיים, היא הנדסית ונמצא את מנתה.**

$\frac{a_{n+1}^*}{a_n^*}=-\frac{a_{n+1}}{a_n}=-q$ **, כי אחד מכל שני איברים עוקבים שינה סימן.**

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 **, לכן:** $\frac{-a_2}{1+q}=-3$ **ובהתאם:** $-a_1q=-3(1+q)$ **.**

אם נחלק את שתי המשוואות נקבל: $-1=\frac{-2(1-q)}{1+q}$

נפתור את המשוואה:

$$-1=\frac{-2(1-q)}{1+q}$$

$$-1-q=-2+2q$$

$$1=3q$$

$$\boxed{q=\frac{1}{3}}$$

$$a_1\cdot\frac{1}{3}=6(1-\frac{1}{3}) \quad \rightarrow \boxed{a_1=12}$$

נראה שאיברי הסדרה השלישית: $\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_4},...$ **מהווים סדרה הנדסית ונמצא את מנתה.**

$3=\frac{1}{q}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{a_{n+1}^*}{a_n^*}$ **, כלומר המנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב-** n **).**

תשובה: הסדרה החדשה הנדסית (ומנתה 3 **) .**

ב. נתון כי סכום n **האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא** 273.25 **.**

$a_2=a_1q=12\cdot\frac{1}{3}=4$ **ובהתאם האיבר הראשון בסדרה השלישית הוא** 0.25 .

$$273.25=\frac{0.25(3^n-1)}{3-1}$$

$$2187=3^n$$

$$\boxed{n=7}$$

תשובה: $n=7$ **.**

א. נגדיר את המאורעות:

A **- משתתפים בחוג לריקודי עם** $\overline{A}$ **- אינם משתתפים בחוג לריקודי עם**

B **- משתתפים בחוג לתיאטרון** $\overline{B}$ **- אינם משתתפים בחוג לתיאטרון**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

A **ו-** B **מאורעות בלתי תלויים: לכן:** $P(B/A)=P(B)$ **, וגם** $P(A/B)=P(A)$ **וגם** $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A)=2P(B)$$
$$P(A/B)=0.6 \quad \rightarrow P(A)=0.6 \quad \rightarrow P(B)=0.3$$
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.3=0.18$$

תשובה: 18% **מתושבי העיר משתתפים בחוג לתיאטרון וגם בחוג לריקודי עם.**

ב. נמצא את ההסתברות שלפחות 2 **מ-** 6 **הנשאלים, שכולם משתתפים בריקודי עם, משתתפים בחוג לתיאטרון .**

$$P(B/A)=P(B)=0.3$$

נחשב את המאורע המשלים - 0 **נשאלים או** 1 **נשאלים משתתפים בחוג לתיאטרון.**

ההסתברות ל- 0 **נשאלים היא** 0.7^6 **.**

ההסתברות עבור 1 **מתוך** 6 **תחושב על ידי נוסחת ברנולי.**

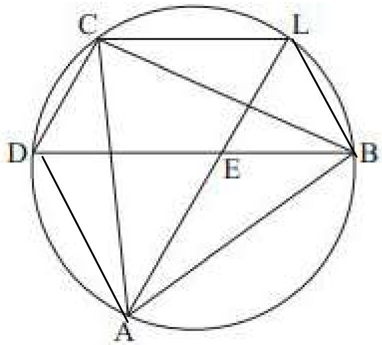
זו התפלגות בינומית, כאשר $n=6$, $p=0.3$ **,** $k=1$ **.**

$$P_6(1)=\binom{6}{1}(0.3)^1(1-0.3)^{6-1}$$
$$P_6(1)=\frac{6!}{1!(6-1)!}\cdot 0.3^1\cdot 0.7^5$$
$$P_6(1)=6\cdot 0.3^1\cdot 0.7^5$$
$$P_6(1)=0.302526$$

ולכן ההסתברות שלפחות שני נשאלים משתתפים בחוג לתיאטרון היא : $1-(0.7^6+0.302526)=0.579825$

תשובה: ההסתברות היא 0.579825 **.**

4



נתונים

1. ΔABC **שווה צלעות** **2.** $BD \parallel LC$

צ"ל: א. $LEDC$ **מקבילית** **ב(1)** ΔADE **שווה צלעות**

ב(2) $LC + LB = LA$

הסבר		טענה	נימוק
1	3	ΔABC שווה צלעות	נתון
4	4	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 60^\circ$	זוויות שוות ל- 60° במשולש שווה צלעות
4	5	$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CLA = 60^\circ$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות וכלל מעבר
2	6	$BD \parallel LC$	נתון
6 ,5	7	$\sphericalangle LCD = \sphericalangle LED = 120^\circ$	זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל- 180°
7 ,5	8	$LEDC$ מקבילית	מרובע עם שני זוגות של זוויות נגדיות שוות
		מ.ש.ל. א	
4	9	$\sphericalangle BCA = 60^\circ$	זוויות שוות ל- 60° במשולש שווה צלעות
9	10	$\sphericalangle BDA = 60^\circ$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות וכלל המעבר
7	11	$\sphericalangle DEA = 60^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
10,11	12	$\sphericalangle DAE = 60^\circ$	סכום זוויות 180° ΔADE
10, 11, 12	13	ΔADE שווה צלעות	מול זוויות שוות מונחת צלעות שוות ΔADE
		מ.ש.ל. ב (1)	
	14	$LE + EA = LA$	סכום קטעים
13	15	$DE = EA$	צלעות שוות במשולש שווה צלעות
8	16	$LC = DE$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
16 ,15	17	$LC = EA$	כלל המעבר
6	18	$\sphericalangle LCB = \sphericalangle CBD$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
18	19	$LB = CD$	על זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים
8	20	$LE = CD$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
20 ,19	21	$LE = LB$	כלל המעבר
14, 17, 21	22	$LC + LB = LA$	הצבה
		מ.ש.ל. ב (2)	

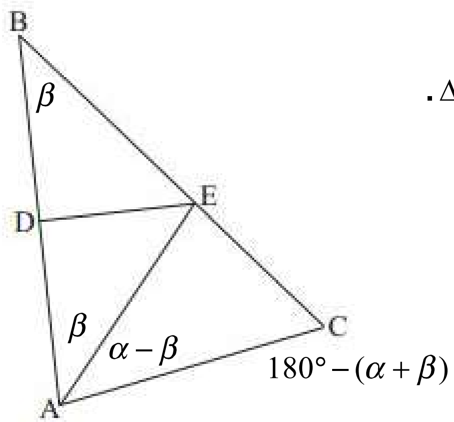
א. (1) $\sphericalangle BCD=\alpha$ **,** $\sphericalangle ABC=\beta$ **(נתון)**

DE **אנך אמצעי ל-** AB **לכן גם גובה ותיכון ב-** ΔABE **.**

ומכאן ש- ΔABE **שווה שוקיים וזוויות הבסיס שלו שוות** $\sphericalangle BAE=\beta$ **ו-** $\sphericalangle EAC=\alpha-\beta$ **(הפרש זוויות).**

תשובה: $\sphericalangle EAC=\alpha-\beta$ **.**

(2) יש למצוא את היחס $\frac{CE}{EB}$**.**



$\sphericalangle BCA=180°-(\alpha+\beta)$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABC **).**

נמצא את היחס $\frac{CE}{AE}$ **באמצעות משפט הסינוסים ב-** ΔAEC **.**

$$\frac{CE}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{EA}{\sin(180°-(\alpha+\beta))}$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ומכיוון ש- $EB=EA$ **זה גם היחס המבוקש.**

תשובה: $\frac{CE}{EB}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

ב. נתון: AE **חוצה זוויות** BAC **ולכן** $\beta=\alpha-\beta$.

$\beta=40°$ **, לכן** $\alpha=80°$ **ו-** $\sphericalangle BCA=60°$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABC**).**

נעביר CT **חוצה זווית** BCA **ולכן:** $\sphericalangle TCA=30°$ **ו-** $\sphericalangle ATC=110°$**(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔATC**).**

רדיוס המעגל החסום הוא TZ **המאונך לצלע** AC**, כי הנקודה** T **היא מפגש חוצי זוויות ב-** ΔABC**,**

והרדיוס מאונך למשיק AC **בנקודת ההשקה** Z .

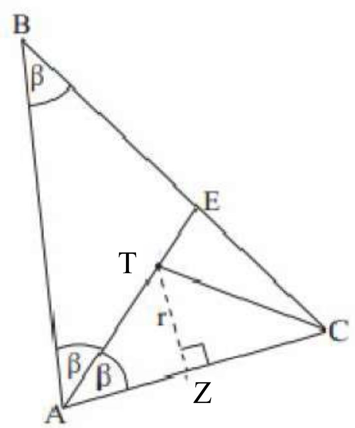
$AC=10$ **ס"מ (נתון).**

נמצא את AT **ב-** ΔATC **באמצעות משפט הסינוסים.**

$$\frac{AT}{\sin 30°}=\frac{AC}{\sin 110°}$$

$$AT=\frac{10\sin 30°}{\sin 110°}$$

$$\boxed{AT=5.321cm}$$



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

נמצא את TZ **ב-** ΔATZ **ישר הזווית.**

$$\sin 40°=\frac{TZ}{AT}$$

$$5.321\sin 40°=TZ$$

$$\boxed{TZ=3.42cm}$$

תשובה: רדיוס המעגל החסום במשולש ABC **הוא** 3.42 **ס"מ.**

א. (1) $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FAB = \beta$ **(נתון). שני המעגלים משיקים מבפנים בנקודה** A **(נתון).**
קטע המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF **, ולכן**

FEA **קוטר במעגל הגדול, ו-** EA **קוטר במעגל הקטן.**

ℓ **משיק משותף לשני המעגלים בנקודה** A

לכן FEA **מאונך לישר** ℓ **קוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה).**

$BC \parallel \ell$ **(נתון) ולכן** $CB \perp AF$ **(אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לשיר שלישי**

אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי) ו- $\sphericalangle BCA = 90° - (\alpha + \beta)$ **(סכום זוויות** $180°$**).**

תשובה: $\sphericalangle BCA = 90° - (\alpha + \beta)$ **.**

(2) יש למצוא את היחס $\frac{AC}{AB}$ **.**

$\sphericalangle CBA = 90° + \beta$ **(זווית חיצונית שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה).**

נמצא את היחס $\frac{AC}{AB}$ **באמצעות משפט הסינוסים ב-** ΔCAB **.**

$$\frac{AC}{\sin(90° + \beta)} = \frac{AB}{\sin(90° - (\alpha + \beta))}$$

$$\boxed{\frac{AC}{AB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}}$$

תשובה: $\frac{AC}{AB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}$ **.**

ב. $AF = 2R$ **קוטר המעגל הגדול ,** $AE = 2r$ **קוטר המעגל הקטן ולכן** $\sphericalangle FCA = \sphericalangle EBA = 90°$ **.**

ΔAFC

$$\frac{AC}{\sin(90° - (\alpha + \beta))} = 2R$$

$$\boxed{AC = 2R\cos(\alpha + \beta)}$$

ΔABE

$$\frac{AB}{\sin(90° - \beta)} = 2r$$

$$\boxed{AB = 2r\cos\beta}$$

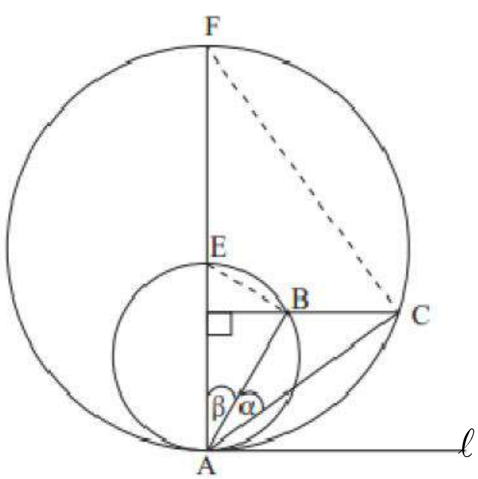
נחלק את שתי המשוואות.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2R\cos(\alpha + \beta)}{2r\cos\beta}$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{R\cos(\alpha + \beta)}{r\cos\beta}$$

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}}$$

תשובה: $\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}$ **.**



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$, $a>1$ **, פרמטר ונתון כי הפונקציה מוגדרת לכל** x .

(1) נחפש אסימפטוטות לפונקציה $f(x)$ **המקבילות לצירים.**

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{a}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+0-0}{1-0+0}=1$ **, לכן** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

אין אסימפטוטה אנכית, כי הפונקציה מוגדרת לכל x **ולכן רציפה.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

(2) נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+a)-(2x-1)(x^2+x-a)}{(x^2-x+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-2x^2+2ax+x^2-x+a-(2x^3+2x^2-2ax-x^2-x+a)}{(x^2-x+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-2x^2+2ax+x^2-x+a-2x^3-2x^2+2ax+x^2+x-a}{(x^2-x+a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x^2+4ax}{(x^2-x+a)^2}}$$

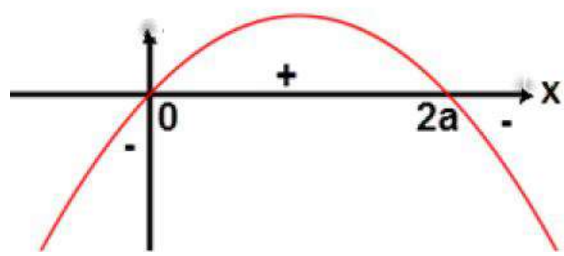
$$0=-2x^2+4ax$$

$$0=2x(-x+2a)$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,-1)}$$

$$\mathrm{x}=2a \quad \rightarrow y=\frac{4a^2+2a-a}{4a^2-2a+a} \quad /:(a>1) \quad \rightarrow (2a,\frac{4a+1}{4a-1})$$

גרף סימני הנגזרת (מכנה חיובי)

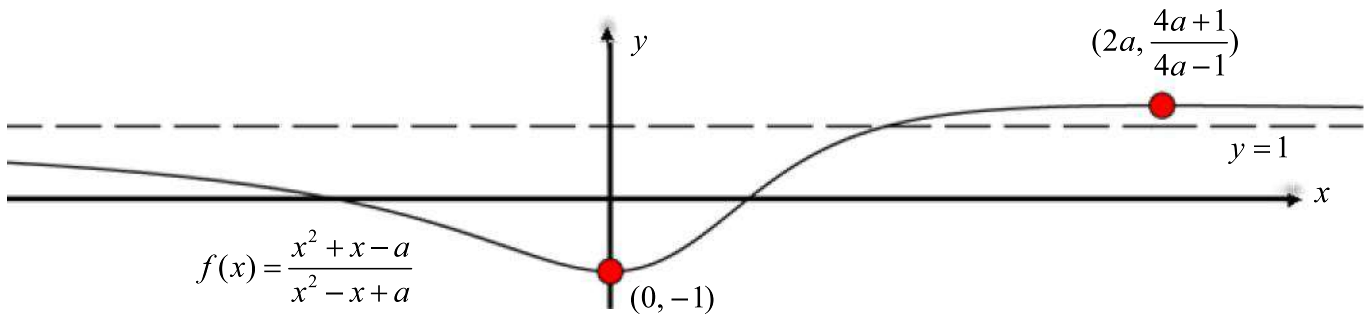


ב- $x=0$ **עוברים מנגזרת שלילית לחיובית, כלומר מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

ב- $x=2a$ **עוברים מנגזרת חיובית לשלילית, כלומר מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $(0,-1)$ **מינימום ,** $(2a,\frac{4a+1}{4a-1})$ **מקסימום.**

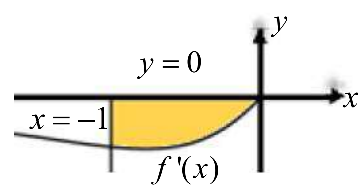
(3) הסקיצה המתאימה, לרבות שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x



ב. גרף הנגזרת, בתחום $x<0$ **, הוא שלילי, כיוון שהפונקציה יורדת עבור** $x<0$ **,**

ונקודת האפס בתחום $x\le 0$ **היא** 0 **על פי תת סעיף א (2):**

על פי הנתון השטח הצהוב שווה ל- $\frac{1}{2}$ **.**



$$S=\int_{-1}^{0}(0-f'(x))dx=-f(x)\Big]_{-1}^{0}=-f(0)+f(-1)=-(-1)+\frac{1-1-a}{1+1+a}=1-\frac{a}{2+a}$$

$$\frac{1}{2}=1-\frac{a}{2+a}$$

$$\frac{a}{2+a}=\frac{1}{2}$$

$$2a=2+a$$

$$\boxed{a=2}$$

בהתאם הפונקציה היא $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $f(x)=0$ **ולכן** $x^2+x-2=0$ **.**

נקבל את המשוואה $(x+2)(x-1)=0$ **והפתרונות הם** $x=-2,1$ **.**

תשובה: נקודות החיתוך עם ציר ה- x **הן** $(1,0)$ **ו-** $(-2,0)$ **.**

הפונקציה שיש להביא *למקסימום* **היא** *אורך האנך* DE.

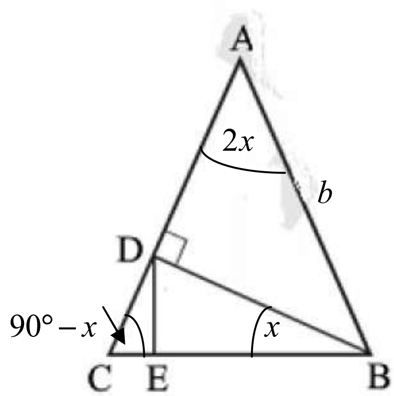
ΔABC **שווה שוקיים, ולכן זוויות הבסיס שוות:** $\sphericalangle C=\frac{180^\circ-2x}{2}=90^\circ-x$.

נציג פתרון תחילה עבור משולש שווה שוקיים, חד זווית, בו הגובה לשוק בתוך המשולש,

ולאחר מכן משולש קהה זווית בו הגובה לשוק מתקבל מחוץ למשולש.

(אם המשולש ישר זווית ושווה שוקיים, אז הגובה לשוק, הוא השוק השנייה, תאור שאינו מתאים לשאלה.)

ΔDBC **ישר זווית, ולכן** $\sphericalangle DBE=x$.



עבור משולש חד זווית (סרטוט עליון)

ΔABD

$$\sin 2x=\frac{BD}{AB}$$

$$\boxed{b\sin 2x=BD}$$

ΔBDE

$$\sin x=\frac{DE}{BD}$$

$$\boxed{b\sin 2x\sin x=DE}$$

עבור משולש קהה זווית (סרטוט תחתון)

ΔBCD

$$\sin(180^\circ-2x)=\frac{BD}{AB}$$

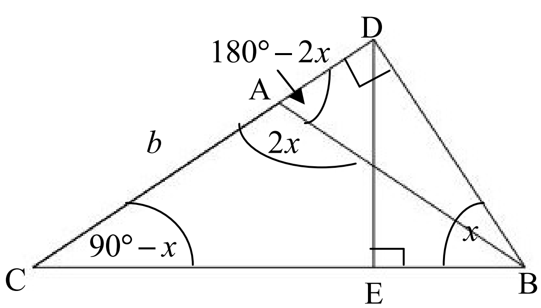
$$\boxed{b\sin 2x=BD}$$

ΔBDE

$$\sin x=\frac{DE}{BD}$$

$$\boxed{b\sin 2x\sin x=DE}$$

ולכן: $\boxed{DE(x)=b\sin 2x\sin x}$ **בשני המקרים**



$$(DE)'(x)=b(2\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x)$$

$$(DE)'(x)=b(2\cos 2x\sin x+2\sin x\cos x\cos x)$$

$$\boxed{(DE)'(x)=2b\sin x(\cos 2x+\cos^2 x)}$$

$$\cancel{0=\sin x}\quad\leftarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x+\cos^2 x=0$$

$$2\cos^2 x-1+\cos^2 x=0$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{3}$$

$$\cos x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cos x=-\sqrt{\frac{1}{3}}\quad\rightarrow\cancel{x=2.186+2\pi k}\quad\leftarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x=\sqrt{\frac{1}{3}}\quad\rightarrow x=0.955+2\pi k\quad\rightarrow x=0.955\quad\leftarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0.9)=0.25b>0\\ f'(1)=-0.21b<0\end{array}\right\}\max$$

קבלנו ש- DE **באורך מקסימלי עבור** $x = 0.955$ **,**

ובמעלות $x = \frac{0.955}{\pi} \cdot 180° = 54.72°$ **.**

$$\sphericalangle BAC = 2x = 2 \cdot 54.72°$$

$$\boxed{\sphericalangle BAC = 109.43°} \ .$$

כלומר הציור המתאים, בדיעבד, הוא הציור התחתון.

תשובה: $\sphericalangle BAC = 109.43°$ **, עבורה האורך של** DE **הוא מקסימלי.**

נציג את הנתונים עבור $f(x)$ המוגדרת בקטע $1<x<2$

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

א. ל- $f(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות בקטע $1<x<2$.

כיוון שערכי הפונקציה, על פי הטבלה, גדלים כאשר שיעור ה- x גדל, הרי שהפונקציה עולה בקטע הנתון.

כיוון שפונקצית הנגזרת השנייה שלילית בקטע, הרי שאין נקודות פיתול שבהן יכולה להתאפס הנגזרת הראשונה.

לכן הנגזרת הראשונה חיובית בקטע זה.

תשובה: הסימן של $f'(1.2)$ הוא חיובי.

ב. על פי הנתון $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון (כלומר הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$).

לכן הפונקציה $f'(x)$ יורדת בקטע הנתון והטענה $f'(1.3)<f'(1.2)<f'(1.1)$ נכונה.

תשובה: הטענה נכונה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ בקטע $1<x<2$.

כיוון שערכי $f(x)$ חיוביים בקטע, הרי שגם הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ מוגדרת בכל הקטע הנתון.

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. מונה הנגזרת חיובי, כי $f'(x)$ חיובית בקטע ($f(x)$ עולה בקטע).

לכן $g(x)$ עולה בכל הקטע הנתון.

תשובה: עלייה $1<x<2$, ירידה: אף x .

ד. נתונה המשוואה $g'(x)=f'(x)$, ויש להראות כי אין פתרון בתחום $1.1\le x\le 1.3$.

$$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=f'(x) \quad /:f'(x)>0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=1$$

$$\frac{1}{2}=\sqrt{f(x)}$$

$$\frac{1}{4}=f(x)$$

כיוון ש- $f(x)$ עולה בתחום $1.1\le x\le 1.3$ הרי שהערך המינימלי שלה הוא 1.19 על פי הטבלה,

ואין פתרון למשוואה $\frac{1}{4}=f(x)$, בתחום $1.1\le x\le 1.3$.

תשובה: הוּכַח .