א. נסמן ב- x את הזמן (בשעות) הדרוש לצבע מתלמד לסיים את העבודה לבדו,

ו ב- y את הזמן (בשעות) הדרוש לצבע ותיק לסיים את העבודה לבדו.

נסמן ב- t (שעות) את הזמן הנדרש לצבע מתלמד אחד ולשני צבעים ותיקים לסיים את הצביעה,

ולכן $1.25t$ הוא זמן העבודה של שני צבעים מתלמדים וצבע אחד ותיק – הגדול ב- 25% מ- t.

יש למצוא את היחס $\frac{x}{y}$.

צבע	זמן (שעות)	חלק עבודה בשעה (הספק)	חלק עבודה כולל (עבודה)
מתלמד	x	$\frac{1}{x}$	1
ותיק	y	$\frac{1}{y}$	1
2 מתלמדים	$1.25t$	$\frac{2}{x}$	$\frac{2.5t}{x}$
1 ותיק	$1.25t$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1.25t}{y}$
1 מתלמד	t	$\frac{1}{x}$	$\frac{t}{x}$
1 ותיקים	t	$\frac{2}{y}$	$\frac{2t}{y}$

נפתור את המשוואה המתאימה , לסיום כל העבודה – בשתי החלופות שהוצגו.

$$\frac{2.5t}{x}+\frac{1.25t}{y}=\frac{t}{x}+\frac{2t}{y} \quad /:t>0$$

$$\frac{2.5}{x}+\frac{1.25}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$$

$$\frac{1.5}{x}=\frac{0.75}{y}$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=2}$$

תשובה: היחס הוא $2:1$.

ב. קצב עבודה של צבע ותיק גדול פי 2 מזה של צבע מתלמד.

כאשר שני צבעים ותיקים עובדים, עם צבע מתלמד אחד – הקצב זהה לזה של חמישה צבעים מתלמדים.

כאשר צבע ותיק אחד עובד, הקצב זהה לזה של שני צבעים מתלמדים –

לכן נדרש להוסיף עוד שלושה צבעים מתלמדים.

תשובה: שלושה צבעים מתלמדים.

א. נתונה סדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n + a_{n+1} = 4\text{n} + 2 \end{cases}$$

אם בסדרה יש 100 **איברים, הרי ששני האיברים האמצעים הם** a_{50} **ו-** a_{51} **,**

המקיימים $a_{50} + a_{51} = 4 \cdot 50 + 2 = 202 \quad (n = 50)$ **.**

תשובה: הסכום הוא 202.

ב. נראה כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי-זוגיים (או זוגיים) מהווים סדרה חשבונית.

כלומר ההפרש $a_{n+2} - a_n$ **הוא קבוע (והוא יהיה הפרש הסדרות החשבוניות).**

$$(n = n+1) \quad a_{n+2} + a_{n+1} = 4 \cdot (n+1) + 2 = 4n + 6$$
$$a_{n+2} + 4n + 2 - a_n = 4n + 6$$
$$a_{n+2} - a_n = 4$$

תשובה: הוּכַח.

ג. אם בסדרה יש 101 **איברים, הרי שהאיבר האמצעי הוא** a_{51} **,**

הנמצא במקום ה- 26 **בסדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים.**

$$b_{26} = b_1 + 25d$$
$$b_{26} = 4 + 25 \cdot 4$$
$$b_{26} = 104 \quad \rightarrow \boxed{a_{51} = 104}$$

תשובה: $a_{51} = 104$.

ד. נחשב את סכום כל 101 **האיברים, באמצעות סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים,**

ובנפרד את אלו שבמקומות הזוגיים.

$$S_{51ODD} \frac{51\left[2 \cdot 4 + 4(51-1)\right]}{2} = 5304$$
$$(n = 1) \quad a_1 + a_2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$$
$$4 + a_2 = 6$$
$$a_2 = 2$$
$$S_{50EVEN} \frac{50\left[2 \cdot 2 + 4(50-1)\right]}{2} = 5000$$
$$S_{101} = 5304 + 5000 = 10{,}304$$

תשובה: סכום כל איברי הסדרה הוא $10{,}304$**.**

א. בישוב גדול $p(woman)=\frac{1}{3}$ **, ובהתאם** $p(man)=\frac{2}{3}$ **.**

בוחרים (פעמיים) ארבעה תושבים, מישוב גדול זה, ונמצא את ההסתברות ששנים מתוכם הם גברים.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=4$, $p=\frac{2}{3}$ **,** $k=2$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברות המתאימה:

$$P_4(2)=\binom{4}{2}\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^{4-2}$$

$$P_4(2)=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2$$

$$P_4(2)=6\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2$$

$$P_4(2)=\frac{8}{27}$$

כיוון שאין תלות בין שתי הקבוצות שנבחרו באקראי,

הרי שההסתברות שבכול אחת מהן יהיו בדיוק שני גברים, היא $(\frac{8}{27})^2=\frac{64}{729}$ **.**

תשובה: ההסתברות היא $\frac{64}{729}$ **.**

ב. ידוע שבקבוצה שנבחרה לראיון ברדיו היו <u>לכל היותר</u> שני גברים,

ויש למצוא את ההסתברות שהיו בקבוצה זו <u>בדיוק</u> שני גברים.

$$p(Exectly\ 2\ men\ /\ At\ most\ 2\ men)=\frac{P(Exectly\ 2\ men\cap At\ most\ 2\ men)}{P(At\ most\ 2\ men)}=\frac{P_4(2)}{P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)}$$

$$P_4(0)=(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$$

$$P_4(1)=\binom{4}{1}\cdot(\frac{2}{3})^1\cdot(1-\frac{2}{3})^{4-1}$$

$$P_4(1)=\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3})^3$$

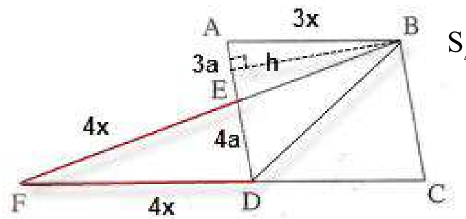
$$P_4(1)=4\cdot(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3})^3$$

$$P_4(1)=\frac{8}{81}$$

$$p(Exectl\ 2\ men\ /\ At\ most\ 2\ men)=\frac{\frac{8}{27}}{\frac{1}{81}+\frac{8}{81}+\frac{8}{27}}=\frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}}=\frac{8}{11}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{8}{11}$ **.**

נתונים



1. ABCD **מקבילית** **2.** $S_{\Delta ABE}=$ 27 **סמ"ר** **3.** $S_{\Delta DFE}=$ 48 **סמ"ר**

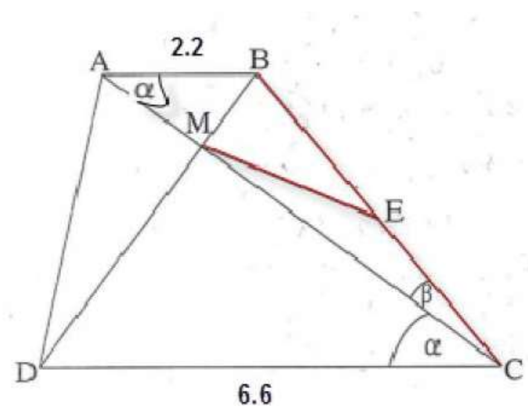
עבור ב. **4.** BCDE **בר חסימה במעגל.**

צ"ל: א. $S_{\Delta BED}$ **ב.** $\frac{AB}{EF}$

הסבר		טענה	נימוק
1	5	ABCD מקבילית	נתון
5	6	$BC \parallel AD$	צלעות המקבילית מקבילות זו לזו
6	7	$\frac{AB}{FD}=\frac{AE}{ED}=\frac{BE}{EF}$	משפט תאלס הרחבה 2
7	8	$\Delta ABE \sim \Delta DFE$	משפט דמיון צלע צלע צלע
2	9	$S_{\Delta ABE}=$ 27 סמ"ר	נתון
3	10	$S_{\Delta DFE}=$ 48 סמ"ר	נתון
9, 10	11	$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta DFE}}=\frac{9}{16}$	חישוב
7, 8, 11	12	$\frac{AB}{FD}=\frac{AE}{ED}=\frac{BE}{EF}=\frac{3}{4}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
12	13	$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BED}}=\frac{AE\cdot h\cdot 0.5}{ED\cdot h\cdot 0.5}=\frac{3}{4}$	לשני המשולשים גובה משותף לצלעות שהיחס ביניהם הוא יחס הדמיון
9, 13	14	$S_{\Delta BED}=$ 36 סמ"ר	חישוב
		מ.ש.ל. א	
6	15	$\sphericalangle EDF=\sphericalangle C$	זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים
4	16	BCDE בר חסימה במעגל	נתון
16	17	$\sphericalangle BED+\sphericalangle C=180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא $180°$
	18	$\sphericalangle FED+\sphericalangle BED=180°$	סכום זוויות צמודות הוא $180°$
17, 18	19	$\sphericalangle FED=\sphericalangle C$	כלל המעבר
15, 19	20	$\sphericalangle FED=\sphericalangle EDF$	כלל המעבר
20	21	$EF=FD$	ב- ΔEFD מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות
12, 21	22	$\frac{AB}{EF}=\frac{3}{4}$	הצבה
		מ.ש.ל. ב	

א. ΔBMC **הוא ישר זווית** $(\sphericalangle BMC = 90°)$ **,** E **אמצע** BC **.**

התיכון ליתר שווה למחצית היתר, ובהתאם: $ME = BE = EC$ **.**



$\underline{\Delta DMC}$

$\cos\alpha = \frac{MC}{DC}$

$\boxed{a\cos\alpha = MC}$

$\underline{\Delta MBC}$

$\cos\beta = \frac{MC}{BC}$

$\boxed{BC = \frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}}$

$\boxed{ME = \frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}}$

תשובה: $ME = \frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}$ **.**

ב. נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$ **,** 6 **ס"מ**$= a$ **,** $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$ **(זוויות מתחלפות שוות בין בסיסי הטרפז המקבילים).**

ΔABC **לפי משפט הסינוסים**

$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}$

$AB = \frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}$

$AB = \frac{6.6\tan\beta}{\tan\alpha}$

$AB = \frac{6.6}{3}$

$\boxed{AB = 2.2}$

תשובה: 2.2 **ס"מ**$= AB$ **.**

ג. נתון: $BM = 1.3$ **ס"מ** .

לפי משפט תאלס הרחבה 2

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BM}{MD}$$

$$MD = \frac{2.2 \cdot 1.3}{6.6}$$

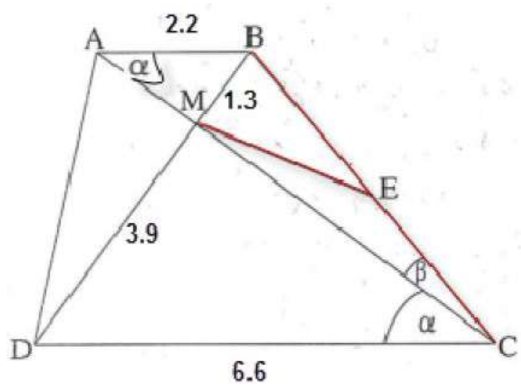
$$\boxed{MD = 3.9cm}$$

$\underline{\Delta DMC}$

$$\sin\alpha = \frac{DC}{DC} = \frac{3.9}{6.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\alpha = 36.22°} \\ \dfrac{\tan\beta}{\tan 36.22°} = \dfrac{1}{3} \\ \boxed{\beta = 13.72°} \end{array}\right\} \measuredangle DCB = 36.22° + 13.72° = 49.94°$$

תשובה: $\measuredangle DCB = 49.94°$.



א. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *אורך הקטע* MN , בתחום $x_{\mathrm{A}} \le x \le x_{\mathrm{B}}$.

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x של שתי הפונקציות, בתחום הסרטוט $0 \le x \le 2\pi$ (גם לזיהוי).

$f(x) = 0.5\sin 2x + \cos x$

$0.5\sin 2x + \cos x = 0$

$\sin x\cos x + \cos x = 0$

$\cos x(\sin x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad \sin x = -1$

$x = \frac{\pi}{2}k + \pi k \quad x = x = \frac{3\pi}{2}k + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$g(x) = \sin 2x$

$\sin 2x = 0$

$2x = \pi k$

$x = \frac{\pi}{2}k$

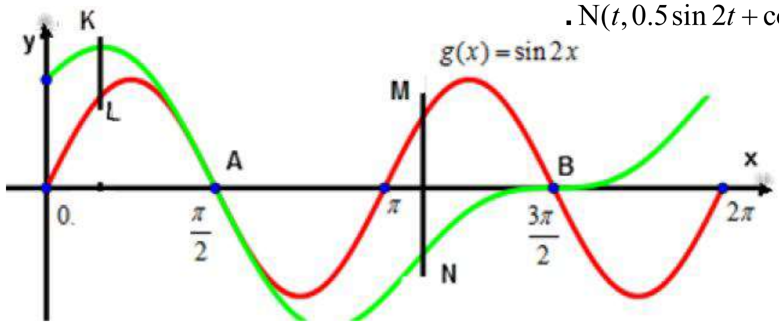
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

ובהתאם שיעורי ה- x של נקודות הקצה של פונקציית הקטע MN הן: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ($\mathrm{A}(\frac{\pi}{2},0), \mathrm{B}(\frac{3\pi}{2},0)$).

ניתן לראות כי התקבלה נקודת חיתוך נוספת, עם ציר ה- x , בין שתי הנקודות והיא $(\pi,0)$,

וכך ניתן לזהות את הגרפים ולהראות כי בתחום $x_{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{2} \le x \le x_{\mathrm{B}} = \frac{3\pi}{2}$ מתקיים $g(x) \ge f(x)$.

נסמן: $\mathrm{M}(t, \sin 2t)$. $x_{\mathrm{N}} = x_{\mathrm{M}} = t$ ולכן: $\mathrm{N}(t, 0.5\sin 2t + \cos t)$.



$\mathrm{MN} = y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{N}}$

$\boxed{\mathrm{MN} = 0.5\sin 2t - \cos t}$

$\boxed{(\mathrm{MN})' = \cos 2t + \sin t}$

$1 - 2\sin^2 t + \sin t = 0$

$-2\sin^2 t + \sin t + 1 = 0$

$(\sin t)_1 = -0.5 \quad (\sin t)_2 = 1$

$\sin t = -0.5$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

נשים לב כי בתחום $0 \le x \le 2\pi$ (תחום הסרטוט, וגם חשוב לסעיף ב),

הפתרונות היחידים שמתקבלים הם: $x = \frac{\pi}{2}$ ו- $x = \frac{7\pi}{6}$, כאשר $\mathrm{MN}(\frac{7\pi}{6}) = 0.5\sin(2 \cdot \frac{7\pi}{6}) - \cos(\frac{7\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה MN , בתחום $x_{\mathrm{A}}=\frac{\pi}{2}\le x\le x_{\mathrm{B}}=\frac{3\pi}{2}$,

כאשר ערכם בקצוות הוא אפס, כי שם שתי הפונקציות הנתונות נחתכות.

x	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
MN(t)	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		0
מסקנה	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**

תשובה האורך המקסימלי של הקטע MN **הוא** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

ב. הפונקציה שיש להביא ***למקסימום*** **היא** ***אורך הקטע*** KL , **בתחום** $0\le x\le\frac{\pi}{2}=x_{\mathrm{A}}$.

בתחום זה מתקיים $f(x)\ge g(x)$, **כלומר** $\mathrm{KL}(t)=-\mathrm{MN}(t)$.

ראינו בסעיף א, כי בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}=x_{\mathrm{A}}$ **נגזרת הפונקציה** $\mathrm{MN}(t)$ **אינה מתאפסת,**

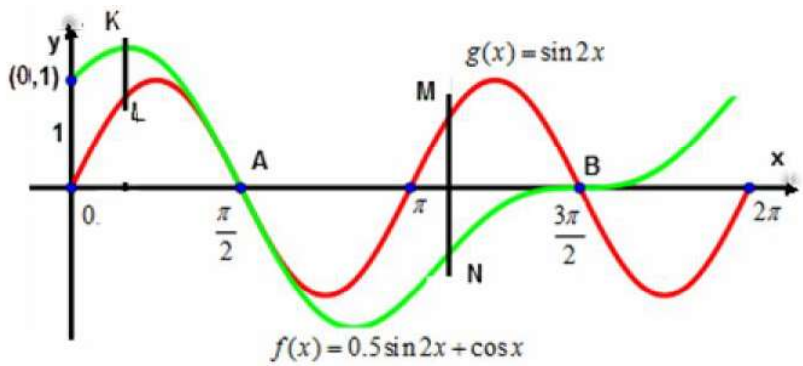
ולכן גם נגזרת הפונקציה $\mathrm{KL}(t)$ **לא מתאפסת, ונקודות הקיצון הן בקצוות.**

$$\mathrm{KL}(0)=\cos 0-0.5\sin(2\cdot 0)=1$$

$$\mathrm{KL}(\frac{\pi}{2})=0$$

ולכן הערך המקסימלי מתקבל בקצה השמאלי.

תשובה: האורך המקסימלי של הקטע KL **הוא** 1.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ **והפונקציה** $g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה של $f(x)$ **, כאשר הביטוי בתוך מכנה השורש חיובי והמונה תלוי בסימן של** x.

כיוון שנדרש שהביטוי שבתוך השורש יהיה אי שלילי, הרי שתחום ההגדרה הוא $x\ge 0$.

עבור $g(x)$ **הביטוי שבתוך השורש שבמכנה הוא חיובי לכל** x **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** x.

תשובה: תחום ההגדרה: $f(x)$ **-** $x\ge 0$ **,** $g(x)$ **- כל** x.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לציר ה- y **(אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה-** x**).**

(ניתן למצוא גם על ידי הצבות, או נימוקים. אין חובה לרשום בעזרת גבולות !)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1/x^2}{1/x^2+1}}=\sqrt{\frac{0}{0+1}}=0 \quad\to \boxed{y=0}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}=\frac{1}{+\infty}=0 \quad\to \boxed{y=0}$$

תשובה: אסימפטוטות המאונכות לציר ה- y **:** $f(x)$ $y=0\,(x\to+\infty)$ **,** $g(x)$ **,** $y=0\,(x\to\pm\infty)$.

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-x^2}{2(1+x^2)^2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}}}$$

מכנה הנגזרת חיובי.

מונה הנגזרת הוא של פרבולה הפוכה,

אשר מתאפסת בתחום ההגדרה עבור $x=1$ **,**

ובו עוברת מחיוביות לשליליות – לכן מקסימום.

תשובה: $(0,0)$ **מינימום (קצה) ,** $(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ **מקסימום.**

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{-6x}{2\sqrt{3x^2+2}}}{3x^2+2}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{-3x}{(3x^2+2)^{1.5}}}$$

מכנה הנגזרת חיובי.

מונה הנגזרת הוא של קו ישר יורד,

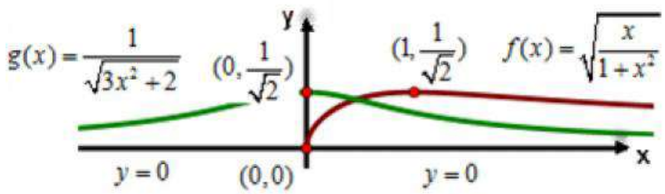
אשר מתאפס עבור $x=0$ **,**

ובו עובר מחיוביות לשליליות – לכן מקסימום.

תשובה: $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ **מקסימום.**

ב. כיוון שהמקסימום המוחלט של שתי הפונקציות שווה ($\frac{1}{\sqrt{2}}$), והגרפים, על פי הנתון, נחתכים פעם אחת בלבד,

הרי ששיעור ה- x **של נקודת החיתוך יהיה בין** 0 **ל-** 1**.**



ג. נתון $h(x)=g(x)-k \quad (k>0)$**.**

זוהי תזוזה אנכית כלפי מטה של $g(x)$ **, ב-** k **יחידות.**

עבור $k>\frac{1}{\sqrt{2}}$ **גרף הפונקציה** $h(x)$

יהיה מתחת לציר ה- x **ולא יחתוך את גרף** $f(x)$ **שהוא אי-שלילי.**

תשובה: $k>\frac{1}{\sqrt{2}}$**.**

א. נתון כי $\int_0^3 (\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}})\,dx = 3$ **ונתון גם:** $f'(x) = kx + 2$ **,** $f(0) = 1$ **(** k **הוא פרמטר).**

נחשב את האינטגרל המסוים, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$\int_0^3 (\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}})\,dx = 3$$

$$\int_0^3 (\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x))\,dx = 3$$

$$\sqrt{f(x)}\,\Big]_0^3 = 3$$

$$\sqrt{f(3)} - \sqrt{f(0)} = 3$$

$$\sqrt{f(3)} - \sqrt{1} = 3 \quad \leftarrow f(0) = 1$$

$$\sqrt{f(3)} - 1 = 3$$

$$\sqrt{f(3)} = 4$$

$$\boxed{f(3) = 16}$$

נמצא את הפונקציה $f'(x) = kx + 2$ **, על ידי חישוב הפונקציה הקדומה של** $f'(x)$

והצבת שתי נקודות, למציאת קבוע האינטגרציה וערך הפרמטר.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int (kx + 2)\,dx$$

$$f(x) = \frac{kx^2}{2} + 2x + c$$

$$1 = \frac{k \cdot 0^2}{2} + 2 \cdot 0 + c \quad \leftarrow f(0) = 1$$

$$\boxed{c = 1}$$

$$16 = \frac{k \cdot 3^2}{2} + 2 \cdot 3 + 1 \quad \leftarrow f(3) = 16$$

$$\boxed{k = 2}$$

$$\boxed{f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2}$$

תשובה: $f(3) = 16$ **,** $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ **.**

ב. נתון כי $g(x)=\sqrt{f(x)}$ כלומר $g(x)$ היא פונקציה אי-שלילית.

(1) לפונקציה $g(x)$ יש נקודת אפס, זהה לזו של $f(x)$, והיא $(-1,0)$.

$g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ ומכאן ש- $g(x)=|x+1|$ במטרה להבטיח את אי-השליליות של הפונקציה.

ניתן לרשום את $g(x)$ גם בתחום מפוצל:

$g(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$ ועל ידי כך להבין שהיא מורכבת משני ישרים, אחד יורד ואחד עולה.

תשובה: הוכח כי $g(x)=|x+1|$.

(2) שתי הפונקציות תחתכנה, כאשר $g(x)=f(x)=1$ בנקודות $(0,1)$, $(-2,1)$,

כי במקרה זה $\sqrt{f(x)}=f(x)=1$ וכאמור, בנקודה $(-1,0)$ כי $\sqrt{f(x)}=f(x)=0$.