**א. (1) נסמן ב- $x$ את הכמות (מ"ק) שהפועלים היו אמורים לכרות ביום, על פי התכנון.**

| | | כמות (מ"ק) (הספק) | זמן (ימים) | כמות כוללת (מ"ק) (עבודה) |
|---|---|---|---|---|
| תכנון | | $x$ | $\frac{216}{x}$ | $216$ |
| בפועל | שלושה ימים | $x$ | $3$ | $3x$ |
| | בשאר הימים | $x+8$ | $\frac{232-3x}{x+8}$ | $232-3x$ |

**הפועלים עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן.**

**נפתור את המשוואה המתאימה .**

$$\frac{232-3x}{x+8}+3+1=\frac{216}{x}$$
$$\frac{232-3x}{x+8}+4=\frac{216}{x} \quad / \cdot x(x+8)$$
$$x(232-3x)+4x(x+8)=216(x+8)$$
$$x^2+48x-1728$$
$$\boxed{x=24} \quad \cancel{x=-72} \quad \leftarrow x>0$$

**תשובה: הפועלים היו אמורים לכרות $24$ מ"ק עץ ביום, על-פי התכנון.**

**(2) התכנון היה לעבוד במשך $9$ ימים $=\frac{216}{24}$ , אולם בפועל עבדו יום אחד פחות.**

**תשובה: הפועלים עבדו $8$ ימים בפועל.**

**ב. נבדוק, במהלך איזה יום סיימו הפועלים לכרות $144$ מ"ק $=\frac{2}{3}\cdot 216$ עץ.**

**בשלושה ימים, כרתו הפועלים $72$ מ"ק $=3\cdot 24$ עץ.**

**לאחר מכן, המשיכו $2.25$ ימים $=\frac{72}{32}=\frac{144-72}{32}$ עד שכרתו $144$ מ"ק עץ, כלומר במהלך היום השישי.**

**תשובה: במהלך היום השישי סיימו הפועלים לכרות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת.**

**ג. (1) בקבוצה של $2m$ פועלים, יש $m$ פועלים מנוסים ו- $m$ פועלים מתלמדים.**

**ההספק היומי של כל הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן, שהוא $24$ מ"ק עץ.**

**מכאן, שהספקו של כל אחד מהם הוא $\frac{24}{m}$ מ"ק עץ.**

**ההספק היומי של כל פועל מתלמד קטן ב- $1$ מ"ק עץ, מזה של פועל מנוסה.**

**מכאן, שהספקו של כל אחד מהפועלים המתלמדים הוא $\frac{24}{m}-1=\frac{24-m}{m}$ מ"ק עץ.**

**תשובה: ההספק היומי של פועל מנוסה הוא $\frac{24}{m}$ מ"ק עץ, ושל כל פועל מתלמד הוא $\frac{24-m}{m}$ מ"ק עץ.**

**(2) הפועלים כרתו $336$ מ"ק עץ במשך $8$ ימים.**

**נפתור את המשוואה המתאימה .**

$$8m\cdot\frac{24-m}{m}+8m\cdot\frac{24}{m}=336$$
$$8(24-m)+192=336$$
$$8(24-m)=144$$
$$24-m=18$$
$$m=6 \quad \to \boxed{2m=12}$$

**תשובה: בקבוצה החדשה יש $12$ פועלים.**

א. (1) בסדרה חשבונית יש $2n+3$ איברים, מספר אי-זוגי של איברים.

$a_1,.......a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},....a_{2n+3}$ , ולכן $a_{n+2}$ הוא האיבר האמצעי בסדרה.

סכום הסדרה גדול פי $43$ מהאיבר האמצעי (ששונה מאפס).

בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים,

שווה סכומה למכפלת האיבר האמצעי במספר האיברים.

כי, $a_1,.......a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},....a_{2n+3}$ $a_1,.......a_{n+2}-2d,a_{n+2}-d,a_{n+2},a_{n+2}+d,a_{n+2}+2d...a_{2n+3}$ , וכן הלאה.

לכן, $S_{2n+3}=(2n+3)a_{n+2}$ , וזה מה שהתבקשנו להוכיח.

דרך חלופית:

$$S_{2n+3}=\frac{(2n+3)\left[2a_1+d(2n+3-1)\right]}{2}$$
$$S_{2n+3}=\frac{(2n+3)\left[2a_1+d(2n+2)\right]}{2}$$
$$S_{2n+3}=(2n+3)\left[a_1+d(n+1)\right]$$
$$\boxed{S_{2n+3}=(2n+3)\cdot a_{n+2}}$$

תשובה: הוכח.

(2)
$$S_{2n+3}=43a_{n+2}$$
$$(2n+3)a_{n+2}=43a_{n+2} \quad /:a_{n+2}\neq 0$$
$$\boxed{2n+3=43}$$

תשובה: בסדרה $43$ איברים.

ב. (1) ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים במקומות האי-זוגיים ( $22$ איברים),

גדול ב- $40$ מסכום האיברים במקומות הזוגיים ( $21$ איברים).

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים שווה ל- $22a_{22}$ ,

וסכום האיברים במקומות הזוגיים שווה ל- $21a_{22}$ , (הכול, בהתאם להסבר שהובא בסעיף א).

$$S_{22odd}=S_{21even}+40$$
$$22a_{22}=21a_{22}+40$$
$$\boxed{a_{22}=40}$$

**דרך אחרת לפתור תת סעיף זה (הדרך השמרנית):**

| | האיברים במקומות הזוגיים | האיברים במקומות האי-זוגיים |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_2 = a_1 + d$ | $a_1$ |
| D | $a_{n+2} - a_n = a_n + 2d - a_n = 2d$ | $2d$ |
| N | 22 | 21 |

$$S_{22odd} = S_{21even} + 40$$
$$\frac{22\left[2a_1 + 2d(22-1)\right]}{2} = \frac{21\left[2(a_1+d) + 2d(21-1)\right]}{2} + 40$$
$$22(a_1 + 21d) = 21(a_1 + d + 20d) + 40$$
$$22(a_1 + 21d) = 21(a_1 + 21d) + 40$$
$$a_1 + 21d = 40$$
$$\boxed{a_{22} = 40}$$

**תשובה: האיבר האמצעי הוא** $a_{22} = 40$.

**(2) נמצא את סכום הסדרה.**

$$S_{43} = 43a_{22}$$
$$S_{43} = 43 \cdot 40$$
$$\boxed{S_{43} = 1720}$$

**תשובה: סכום הסדרה הוא** $1720$.

**ג. נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא** $-a_1$.

$$a_{22} = 40$$
$$a_1 + 21d = 40$$
$$-d + 21d = 40 \quad \leftarrow a_1 = -d \leftarrow d = -a_1$$
$$20d = 40$$
$$\boxed{d = 2}$$

**תשובה: הסדרה עולה.**

**ד. המחובר האחרון, באיבר האחרון של הסדרה החדשה, הוא** $a_{43}$ **בסדרה המקורית.**

**כל איבר בסדרה החדשה הוא עם** $k$ **מחוברים,**

**לכן המחובר הראשון, באיבר האחרון של הסדרה החדשה, הוא** $a_{43-k+1} = a_{44-k}$.

**כיוון שהמחובר הראשון, באיבר הראשון של הסדרה החדשה הוא** $a_1$**, הרי שבסדרה החדשה** $44-k$ **איברים.**

**תשובה: מספר האיברים בסדרה החדשה הוא** $44-k$.

**א. (1) נגדיר את המאורעות הבאים:**

$A$ **- עברו את מבחן המתכונת** $\overline{A}$ **- לא עברו את מבחן המתכונת**

$B$ **- עברו את מבחן הבגרות** $\overline{B}$ **- לא עברו את מבחן הבגרות**

**<u>נתונים ומשמעויות מידיות בשנת 2017</u>**

$$N(A\cap\overline{B})=N(\overline{A}\cap B)\quad\rightarrow P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap B)=x$$

$$N(A)=N(B)=250$$

$$P(B/A)=0.9\quad\rightarrow P(\overline{B}/A)=0.1$$

$P(B)=0.8 \quad \rightarrow P(\overline{B})=0.2$ **, ולכן:** $P(A\cap B)=0.8-x$ **, ומכאן ש:** $P(A)=0.8$ **ו-** $P(\overline{A})=0.2$ **.**

**נציב בטבלה ונשלים נתונים.**

| | $A$ **עברו מתכונת** | $\overline{A}$ **לא עברו מתכונת** | |
|---|---|---|---|
| $B$ **עברו בגרות** | $0.8-x=0.72$ | $x=0.08$ | 0.8 |
| $\overline{B}$ **לא עברו בגרות** | $x=0.08$ | 0.12 | 0.2 |
| | 0.8 | 0.2 | 1 |

**<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>**

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$0.9=\frac{0.8-x}{0.8}$$

$$0.72=0.8-x$$

$$\boxed{x=0.08}$$

**נציב בטבלה ונשלים נתונים.**

$$P(A\cap B)=0.72\quad\rightarrow N(A\cap B)=0.72\cdot250=180$$

**תשובה:** $180$ **תלמידים עברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות.**

**(2)** $$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0.08}{0.2}=0.4$$

**תשובה: ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות, אם ידוע שנכשל בבחינת המתכונת, היא** $0.4$ **.**

**(3)** $$\left[P(\overline{B}/\overline{A})\right]^2=\left[\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}\right]^2=\left[\frac{0.12}{0.2}\right]^2=0.6^2=0.36$$

**תשובה: ההסתברות ששני תלמידים (עם החזרה) נכשלו במתכונת, אם ידוע שנכשלו בבגרות, היא** $0.36$ **.**

**ב. נתונים ומשמעויות מידיות בשנת 2018**

$$N(A\cap\overline{B})=N(\overline{A}\cap B)\quad\rightarrow P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap B)=x$$

**אין תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות".**

$$P(B)=a\quad\rightarrow P(\overline{B})=1-a$$

$$P(B)=a\quad\rightarrow P(A\cap B)=a-x\quad\rightarrow P(A)=a$$

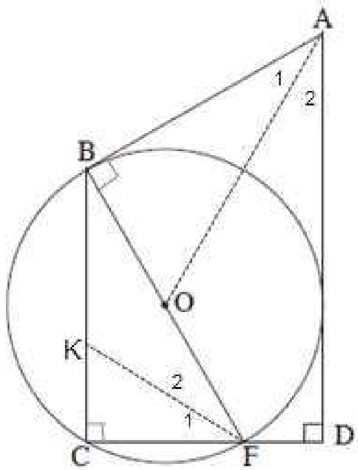
| | **עברו מתכונת** $A$ | **לא עברו מתכונת** $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| **עברו בגרות** $B$ | $a-x$ | $x$ | $a$ |
| **לא עברו בגרות** $\overline{B}$ | $x$ | | $1-a$ |
| | $a$ | | $1$ |

**יש להביע את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו, באמצעות** $a$ **.**

**נשתמש באי התלות בין המאורעות.**

$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=a(1-a)$ **.**

**תשובה: ההסתברות היא** $a(1-a)$ **.**




**נתונים**

**1.** $O$ **מרכז המעגל** **2.** $R$ **רדיוס המעגל** **3.** $BF$ **קוטר**

**4.** $AB$ **משיק ב-** $B$ **5.** $AD$ **משיק** **6.** $AD \perp CD$ .

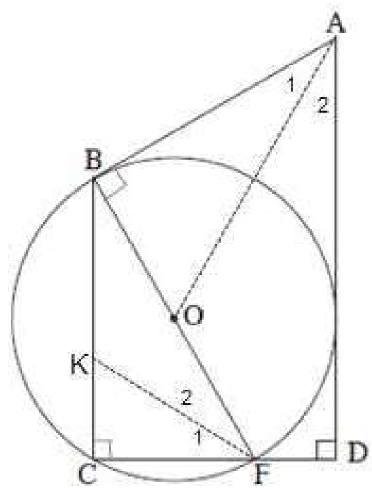
**עבור ב. 7.** $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle F_2$ .

**צ"ל: א.** $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAD$ **ב.** $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$

**ג.** $KB \cdot AB = 2R^2$ **ד.** $S_{\Delta BFK} > S_{\Delta KFC}$

| הסבר | | טענה | נימוק |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | $O$ **מרכז המעגל** | **נתון** |
| 4 | 9 | $AB$ **משיק ב-** $B$ | **נתון** |
| 8, 9 | 10 | $AB \perp OB$ | **רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה** |
| 6 | 11 | $AD \perp CD$ | **נתון** |
| | 12 | $\sphericalangle BFC + \sphericalangle BFD = 180°$ | **זווית שטוחה שווה** $180°$ |
| 10, 11 | 13 | $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BFD = 180°$ | **סכום זוויות** $360°$ **במרובע** $ABFD$ |
| 12, 13 | 14 | $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAD$ | **חישוב** |
| | | **מ.ש.ל. א** | |
| 7 | 15 | $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle F_2$ | **נתון** |
| 5 | 16 | $AD$ **משיק** | **נתון** |
| 1, 9, 16 | 17 | $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ | **אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל,**<br>**אז הקטע למרכז המעגל**<br>**חוצה את הזווית שבין המשירים** |
| 14, 15, 17 | 18 | $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle A_1$ **(ז)** | **כלל המעבר** |
| 3 | 19 | $BF$ **קוטר** | **נתון** |
| 19 | 20 | $BC \perp CD$ | **זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה** |
| 10, 20 | 21 | $\sphericalangle C = \sphericalangle ABO = 90°$ **(ז)** | **כלל המעבר** |
| 18, 21 | 22 | $\Delta FCK \sim \Delta ABO$ | **משפט דמיון זווית זווית** |
| 22 | 23 | $\frac{FC}{AB} = \frac{FK}{AO} = \frac{CK}{BO}$ | **יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים** |
| 23 | 24 | $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$ | **חישוב** |
| | | **מ.ש.ל. ב** | |

| הסבר | | טענה | נימוק |
|---|---|---|---|
| 7 | 25 | $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle F_2$ | נתון |
| 25 | 26 | $\frac{BK}{KC} = \frac{BF}{CF}$ | משפט חוצה זווית $\Delta FCB$ |
| 26 | 27 | $KC = \frac{CF \cdot BK}{BF}$ | חישוב |
| 2 | 28 | $R$ רדיוס המעגל | נתון |
| 19, 24, 27, 28 | 29 | $\frac{CF \cdot R}{AB} = \frac{CF \cdot BK}{2R}$ | כלל המעבר והצבה |
| 29 | 30 | $KB \cdot AB = 2R^2$ | חישוב |
| | | מ.ש.ל. ג | |
| 20, 26 | 31 | $\frac{S_{\Delta BFK}}{S_{\Delta KFC}} = \frac{BK \cdot CF \cdot 0.5}{BK \cdot CF \cdot 0.5} = \frac{BK}{KC} = \frac{BF}{CF}$ | נוסחאות שטח משולש וכלל המעבר |
| 20 | 32 | $BF > CF$ | היתר הצלע הגדולה ביותר ב- $\Delta FCB$ |
| 31, 32 | 33 | $S_{\Delta BFK} > S_{\Delta KFC}$ | חישוב |
| | | מ.ש.ל ד | |



**א. (1)** $R$ **רדיוס המעגל החוסם את** $\Delta ABC$ .

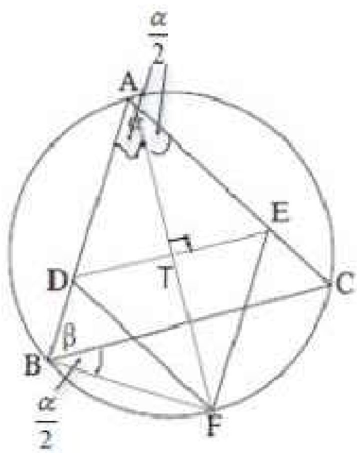
$ABFE$ **מעוין, ולכן האלכסונים חוצים את זוויותיו ומאונכים זה לזה.**

$\sphericalangle BAC=\alpha$ **ולכן** $\sphericalangle FAE=\sphericalangle FAD=\frac{\alpha}{2}$ **,** $\sphericalangle ABC=\beta$ .

$\sphericalangle CBF=\sphericalangle FAC=\frac{\alpha}{2}$ **(זוויות היקפיות שוות, הנשענות על אותה קשת)** .

**תשובה:** $\sphericalangle ABF=\beta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$ .

**(2) על פי משפט הסינוסים:**




$\underline{\Delta AFB}$

$$\frac{AF}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}=2R \quad \rightarrow \boxed{AF=2R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}$$

**תשובה:** $AF=2R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})$ .

**ב. נמצא את אורך צלע המעוין** $ABFE$ .

$\underline{\Delta ATE}$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AT}{AE}$$

$$\boxed{AE=\frac{R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

**תשובה: אורך צלע המעוין הוא** $\frac{R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ .

**ג. נתון כי הוא קוטר במעגל, לכן** $AF = 2R,\ AT = R$ **.**

$\sphericalangle ABF = \beta + \dfrac{\alpha}{2} = 90°$ **(זווית היקפית, הנשענת על הקוטר, היא ישרה)**

$$AE = \frac{R\sin 90°}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{AE = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

**נמצא את שטח המעוין** $ABFE$ **.**

$$S_{ADFE} = AE \cdot AD \cdot \sin\sphericalangle EAD$$

$$S_{ADFE} = \left(\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \sin\alpha$$

$$S_{ADFE} = \frac{R^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{S_{ADFE} = 2R^2 \tan\frac{\alpha}{2}}$$

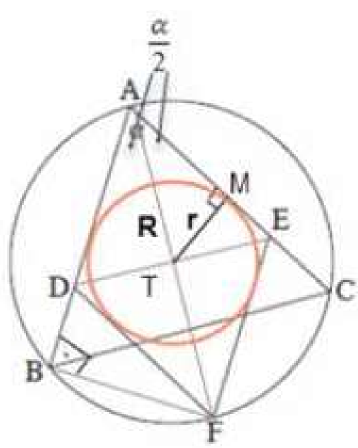
**תשובה: הוּכַח.**

**ד. נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין הוא** $\frac{3}{5}R$**.**

**מפגש אלכסוני המעוין הוא מרכז המעגל החסום בו, כי הוא מפגש חוצי זוויותיו.**

**נוריד אנך** $TM$ **, ממפגש אלכסוני המעוין לצלע המעוין.**

**לכן** $TM$ **הוא רדיוס המעגל החסום המעוין, כאשר** $AE$ **הוא משיק למעגל זה.**




$\underline{\Delta ATM}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{TM}{AT} = \frac{0.6R}{R} = 0.6$$

$$\frac{\alpha}{2} = 36.87° \quad \leftarrow \frac{\alpha}{2} < 90°$$

$$\boxed{\beta = 53.13°} \quad \leftarrow \beta + \frac{\alpha}{2} = 90°$$

**תשובה:** $\beta = 53.13°$ **.**

**א. נתונה הפונקציה** $g''(x)=-\frac{18}{x^4}+\frac{18}{(x-4)^4}$ **, שתחום ההגדרה שלה הוא** $x\neq 0,4$ .

**ולכן, על פי הנתון, זה תחום ההגדרה גם של** $g'(x)$ **וגם של** $g(x)$ **.**

**(1) נתון כי משוואת המשיק לפונקציה** $g(x)$ **, בנקודת הפיתול שלה, היא** $y=\frac{3}{2}x-3$ **.**

**נמצא את שיעור ה-** $x$ **בנקודת הפיתול.**

$$0=-\frac{18}{x^4}+\frac{18}{(x-4)^4} \quad \rightarrow \frac{18}{x^4}=\frac{18}{(x-4)^4}$$

$$x^4=(x-4)^4$$

$$\cancel{x=x-4} \quad or \quad -x=x-4 \quad \rightarrow \boxed{x=2}$$

**לכן, על פי שיפוע המשיק בנקודת הפיתול** $g'(2)=\frac{3}{2}$ **,**

**ועל-פי משוואת המשיק, שיעורי נקודת הפיתול הם** $y=\frac{3}{2}\cdot 2-3=0 \rightarrow (2,0)$ **.**

$$g'(x)=\int\ g''(x)\,dx=\int\ 18\,(-x^{-4}+(x-4)^{-4})\,dx$$

$$g'(x)=18\cdot(-\frac{x^{-3}}{-3}+\frac{(x-4)^{-3}}{-3})+c$$

$$g'(x)=6\cdot(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x-4)^3})+c$$

$$\frac{3}{2}=6\cdot(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(2-4)^3})+c \quad \leftarrow g'(2)=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+c \quad \rightarrow c=0 \quad \rightarrow \boxed{g'(x)=\frac{6}{x^3}-\frac{6}{(x-4)^3}}$$

$$g(x)=\int\ g'(x)\,dx=\int\ 6\,(x^{-3}-(x-4)^{-3})\,dx$$

$$g(x)=6\cdot(\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{(x-4)^{-2}}{-2})+c$$

$$g(x)=3\cdot(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-4)^2})+c$$

$$0=3\cdot(-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(2-4)^2})+c \quad \leftarrow g(2)=0$$

$$0=0+c \quad \rightarrow c=0 \quad \rightarrow \boxed{g(x)=\frac{3}{(x-4)^2}-\frac{3}{x^2}}$$

**תשובה:** $g(x)=\frac{3}{(x-4)^2}-\frac{3}{x^2}$ **.**

**(2) תשובה: תחום ההגדרה של** $g(x)$ **הוא** $x \neq 0,4$**.**

**(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של** $g(x)$.

$$g'(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3}$$

$$0 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3}$$

$$\frac{6}{(x-4)^3} = \frac{6}{x^3}$$

$$x^3 = (x-4)^3$$

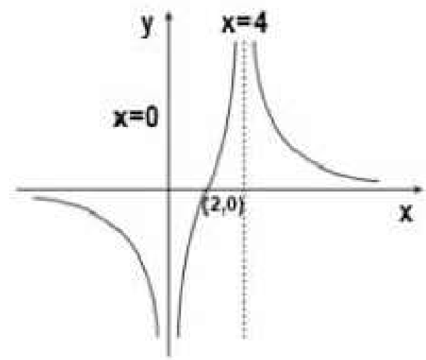
$$x = x-4$$

$$0 = -4$$

**אין נקודות קיצון. נמצא את סימני הנגזרת :** $g'(-1) < 0\ ,\ g'(1) > 0\ ,\ g'(5) < 0$ **.**

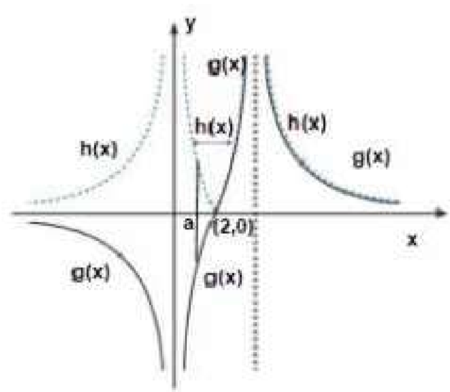
**תשובה: עלייה -** $0 < x < 4$ **, ירידה -** $x > 4$ **או** $x < 0$ **.**

**(4) סקיצה של** $g(x)$.

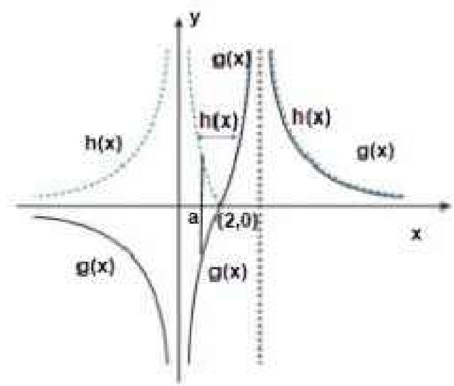



**ב.** $h(x) = |g(x)| \rightarrow h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 2, x \neq 4 \\ -g(x) & x < 2, x \neq 0 \end{cases}$ **.**

**סקיצה מתאימה, כולל סימון שטח עבור סעיף ג.**



**ג. נתון כי** $\int_a^2 g(x)\,dx = t$**, כאשר** $0<a<2$ **, ו-** $t$ **הוא פרמטר.**




**ניתן לראות, על פי הסקיצה, בתחום** $0<a<2$ **,**

**כי מעל ציר ה-** $x$ **:** $\int_a^2 (h(x)-0)\,dx = \int_a^2 (-g(x)-0)\,dx = -t$

**וגם כי מתחת לציר ה-** $x$ **:** $\int_a^2 (0-g(x))\,dx = -t$**.**

**מכאן שגודלו של השטח הוא** $-t+(-t)=-2t$**, ולכן** $\int_a^2 (h(x)-g(x))\,dx = -2t$ **.**

**ניתן לחשב, גם ללא היעזרות בשטחים, אך מתוך הבנה כי בתחום** $0<a<2$ **מתקיים** $h(a)=-g(a)$ **:**

$$\int_a^2 (h(x)-g(x))\,dx = \int_a^2 (-g(x)-g(x))\,dx = \int_a^2 (-2g(x))\,dx = -2t$$ **.**

**תשובה:** $\int_a^2 (h(x)-g(x))\,dx = -2t$

**א. נתונה הפונקציה:** $f(x)=2\sin x+\cos 2x-1$ **, בתחום** $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ **.**

**(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה-** $y$ **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $(0,0)\ \to$ $f(0)=2\sin 0+\cos(2\cdot 0)-1=0$ **.**

**בנקודת החיתוך עם ציר ה-** $x$ **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=2\sin x+\cos 2x-1$$
$$0=2\sin x+1-2\sin^2 x-1$$
$$0=2\sin x\,(1-\sin x)$$
$$\sin x=0 \qquad \sin x=1$$
$$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$
$$(0,0) \qquad (\frac{\pi}{2},0)$$
$$(\pi,0)$$

**תשובה:** $(\pi,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(0,0)$ **.**

**(2) נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:**

$$f(-\frac{\pi}{2})=2\sin(-\frac{\pi}{2})+\cos(2\cdot(-\frac{\pi}{2}))-1=-4 \quad\to \boxed{(-\frac{\pi}{2},-4)}$$
$$f(\frac{3\pi}{2})=2\sin(\frac{3\pi}{2})+\cos(2\cdot\frac{3\pi}{2})-1=-4 \quad\to \boxed{(\frac{3\pi}{2},-4)}$$

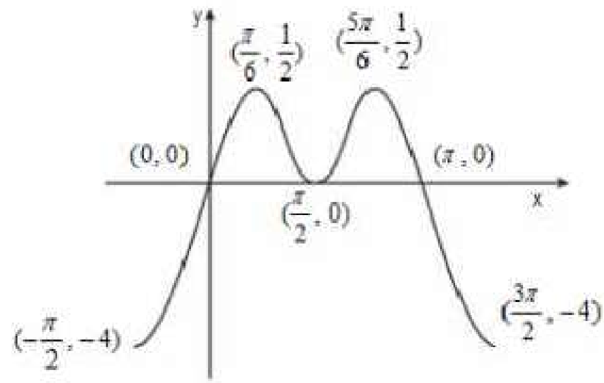
$$\boxed{f'(x)=2\cos x-2\sin 2x}$$
$$0=2\cos x-4\sin x\cos x$$
$$0=2\cos x\,(1-2\sin x)$$
$$\cos=0 \qquad\qquad \sin x=0.5=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad\qquad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$
$$(\pm\frac{\pi}{2},0),(\frac{3\pi}{2},-4) \qquad (\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}) \qquad (\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2})$$

**נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את נקודות הקיצון וסוגן.**

| $x$ | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-4$ | | $\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $-4$ |
| $f'(x)$ | | | | | | | | | |
| **מסקנה** | **Min** | ↘ | **Max** | ↗ | **Min** | ↘ | **Max** | ↗ | **Min** |

**תשובה:** $(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2})$ **,** $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ **מקסימום,** $(\frac{3\pi}{2},-4)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},-4)$ **מינימום .**

**(3) סקיצה של** $f(x)=2\sin x+\cos 2x-1$ .



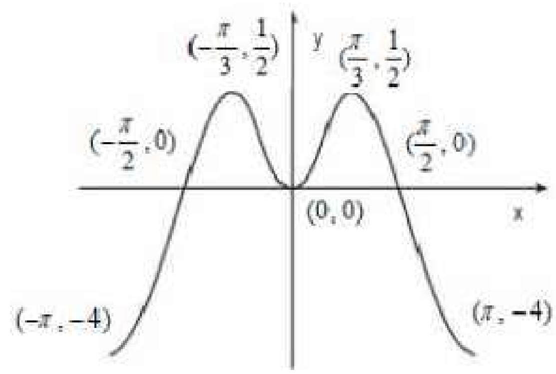

**ב. גרף הפונקציה:** $f(x)=2\sin x+\cos 2x-1$ **הוזז שמאלה ב** $\frac{\pi}{2}$ **,**

**כך שהתקבלה פונקציה** $g(x)$ **, בתחום** $-\pi \le x \le \pi$.

**(1) תשובה:** $g(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$ .

**(2) סקיצה מתאימה של** $g(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$ .

$(-\pi,-4)$




**(3) נוכיח ש-** $g(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$ **זוגית, כפי שניתן לראות מהסקיצה** .

$$g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos 2(x+\frac{\pi}{2})-1$$

$$g(x)=2\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(2x+\pi)-1 \quad \leftarrow \sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$$

$$\boxed{g(x)=2\cos x-\cos 2x} \quad \leftarrow \sin(90°-\alpha)=\cos\alpha, \quad \cos\alpha=-\cos(180°+\alpha)$$

$$g(-x)=2\cos(-x)-\cos(-2x)$$

$$g(-x)=2\cos x-\cos 2x \quad \leftarrow \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\boxed{g(-x)=g(x)}$$

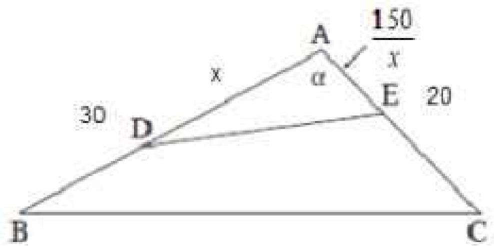
**תשובה: הוכח.**

**ג.** $f(x+\frac{\pi}{2})$ **היא הזזה שמאלה ב-** $\frac{\pi}{2}$ **של** $f(x)$ **.**

**לכן,** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+\frac{\pi}{2})\,dx$ **, כי גם הגבולות הוזזו שמאלה ב-** $\frac{\pi}{2}$**.**

**תשובה:** II $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+\frac{\pi}{2})\,dx$

**א. נביע באמצעות $x$ את אורך הקטע AE.**




$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{AE \cdot AD \cdot \sin \sphericalangle A}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle A}{2} \quad / : \frac{\sin \sphericalangle A}{2} > 0$$

$$AE \cdot x = \frac{1}{4} \cdot 30 \cdot 20$$

$$\boxed{AE = \frac{150}{x}}$$

**תשובה:** $AE = \frac{150}{x}$ .

**ב. (1) הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא אורך הקטע DE, כאשר $\alpha$ קבוע.**

$\underline{\Delta ADE}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(DE)^2 = (AD)^2 + (AE)^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos \sphericalangle A$$

$$(DE)^2 = x^2 + \left(\frac{150}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{150}{x} \cdot \cos \alpha$$

$$(DE)^2 = x^2 + \frac{22500}{x^2} - 300 \cos \alpha$$

$$\boxed{DE = \sqrt{x^2 + \frac{22500}{x^2} - 300 \cos \alpha}} \leftarrow DE > 0$$

$$(DE)' = \frac{2x + \frac{0 - 22500 \cdot 2x}{x^4}}{2\sqrt{x^2 + \frac{22500}{x^2} - 300 \cos \alpha}}$$

$$\boxed{(DE)' = \frac{2x^4 - 45000}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{22500}{x^2} - 300 \cos \alpha}}}$$

$$2x^4 - 45000 = 0$$

$$x^4 = 22500$$

$$x = 5\sqrt{6} \sim 12.2 \quad \leftarrow x > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (DE)'(12) = \frac{-}{+} < 0 \\ (DE)'(13) = \frac{+}{+} > 0 \end{array}\right\} x = 5\sqrt{6}, o.k.$$

$$DE\,(5\sqrt{6}) = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 + \frac{22500}{(5\sqrt{6})^2} - 300 \cos \alpha}$$

$$DE\,(5\sqrt{6}) = \sqrt{300 - 300 \cos \alpha}$$

**תשובה: האורך המינימלי של הקטע** DE **הוא** $\sqrt{300 - 300 \cos \alpha}$ .

**(2) כיוון שאורך הצלע** BC **הוא קבוע, הרי שהיחס** $\frac{DE}{BC}$ **הוא מינימלי, כאשר** DE **מינימלי.**

**על פי תת סעיף ב(1)** DE **מינימלי , כאשר** $x = 5\sqrt{6}$ **.**

**תשובה:** $x = 5\sqrt{6}$**, עבורו היחס** $\frac{DE}{BC}$ **הוא מינימלי.**