א. נסמן ב- x **את מהירות הרוכב בעליות (קמ"ש, קבועה) ובהתאם** $x+10$ **מהירותו בירידות.**

נסמן ב- y **אורך המסלול מ-** E **ל-** B **(ק"מ)**

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מ- A עד E	$\frac{70-y}{x}$	x	$70-y$
מ- E עד B	$\frac{y}{x+10}$	$x+10$	y
מ- B עד E	$\frac{y}{x}$	x	y
מ- E עד A	$\frac{70-y}{x+10}$	$x+10$	$70-y$

הרוכב עבר את הדרך מ- A **ל-** B **ב-** 4.5 **שעות, והמשוואה המתאימה היא** $\frac{70-y}{x}+\frac{y}{x+10}=4.5$

הרוכב עבר את הדרך מ- B **ל-** A **ב-** 6 **שעות, והמשוואה המתאימה היא** $\frac{y}{x}+\frac{70-y}{x+10}=6$

$$\begin{cases}\frac{70-y}{x}+\frac{y}{x+10}=4.5\\ \frac{y}{x}+\frac{70-y}{x+10}=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}(70-y)(x+10)+xy=4.5x(x+10)\\ y(x+10)+x(70-y)=6x(x+10)\end{cases}$$

$$\begin{cases}70x+700-xy-10y+xy=4.5x^2+45x\\ xy+10y+70x-xy=6x^2+60x\end{cases}$$

$$+\begin{cases}70x-10y+700=4.5x^2+45x\\ 70x+10y=6x^2+60x\end{cases}$$

$$140x+700=10.5x^2+105x$$

$$10.5x^2-35x-700=0\quad\rightarrow x_{1,2}=\frac{35\pm175}{21}\quad\rightarrow x=10\quad\leftarrow x>0$$

תשובה: מהירות הרוכב בעלייה 10 **קמ"ש**

ב. נציב $x=10$ **במשוואה הראשונה:** $\frac{70-y}{10}+\frac{y}{10+10}=4.5$

$$140-2y+y=90\quad\rightarrow y=50$$

תשובה: אורך המסלול מ- E **ל-** B 50 **ק"מ.**

א. (1) a_n **ו-** a_k **הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה-** n **ובמקום ה-** k **בהתאמה.**

הפרש הסדרה הוא d **והאיבר הראשון בסדרה הוא** $a_1 = md$ **.**

$$a_n + a_k = a_1 + d(n-1) + a_1 + d(k-1)$$
$$a_n + a_k = a_1 + d(n-1) + md + d(k-1)$$
$$a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$$

הוּכַח.

(2) הנוסחה לאיבר כללי בסדרה חשבונית היא $a_n = a_1 + d(n-1)$

ובהתאם האיבר השווה לסכום $a_n + a_k$ **נמצא במקום ה-** $n+k+m-1$

תשובה: $n+k+m-1$

ב. (1) עבור $a_{34} + a_{65}$ **, בהתאמה לסעיף א. (1):** $n = 34, k = 65$ **.**

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(34+65+m-2)$$
$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(97+m)$$

תשובה: $a_1 + d(97+m)$ **.**

(2) נתון כי $a_{34} + a_{65} = a_{109}$ **, כלומר:** $a_1 + d(97+m) = a_{109}$ **, ועל פי סעיף א (2):**

$$109 = 34 + 65 + m - 1$$
$$\boxed{m = 11}$$

סכום 79 **האיברים הראשונים בסדרה הוא** 7900 **.**

$$7900 = \frac{79}{2}(2a_1 + 78d)$$
$$100 = a_1 + 39d$$
$$100 = md + 39d$$
$$100 = 11d + 39d$$
$$\boxed{d = 2}$$
$$a_1 = md = 11 \cdot 2$$
$$\boxed{a_1 = 22}$$

תשובה: $a_1 = 22\ ,\ d = 2$

א. (1) יש למצוא את ההסתברות שבדיוק ב- 2 זריקות מתוך 3 נקבל את המספר שש בקובייה מאוזנת.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברויות המתאימות:

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=3$, $p=\frac{1}{6}$ **,** $k=2$

$$P_3(2)=\binom{3}{2}(\frac{1}{6})^2(1-\frac{1}{6})^{3-2}=3\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^1=\frac{5}{72}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{5}{72}$.

(2) יש למצוא את ההסתברות שבדיוק ב- 2 זריקות מתוך 3 נקבל את המספר שש בקובייה הלא- מאוזנת:

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=3$, $p=\frac{1}{3}$ **,** $k=2$

$$P_3(2)=\binom{3}{2}(\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{3})^{3-2}=3\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{2}{3})^1=\frac{2}{9}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{2}{9}$.

ב. (1) לפנינו בחירה אקראית של קובייה, עם הסתברות 0.5 ונחשב בהתאם לתוצאות הסעיף הקודם:

$$p=0.5\cdot\frac{5}{72}+0.5\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{48}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{7}{48}$.

(2) נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת:

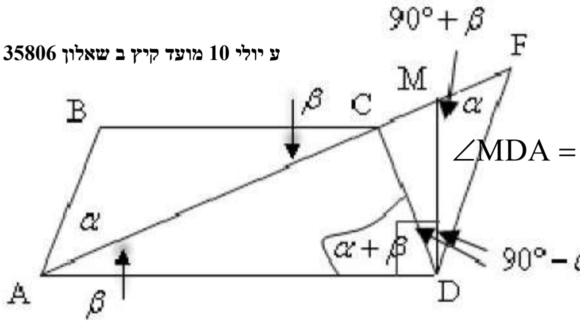
$$P(\text{Unbalanced Cube}\,/\,2\ \mathit{six\ out\ of}\ 3)=$$
$$=\frac{P(\text{Unbalanced Cube}\cap 2\ \mathit{six\ out\ of}\ 3)}{P(2\ \mathit{six\ out\ of}\ 3)}=$$
$$=\frac{0.5\cdot\frac{2}{9}}{\frac{7}{48}}=\frac{16}{21}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{16}{21}$.

ג. ההסתברות למאורע המשלים " 0 פעמים המספר שש מתוך n הטלות " היא $(\frac{2}{3})^n$.

בהתאם ההסתברות למאורע " לקבל לפחות פעם אחת את המספר שש מתוך n הטלות " היא $1-(\frac{2}{3})^n$.

תשובה: ההסתברות היא $1-(\frac{2}{3})^n$.



נתונים

1. ABCD **טרפז שווה שוקיים** $(BC \parallel AD)$ **2 .** $AB \parallel DF$ **.3** $\angle MDA = 90°$

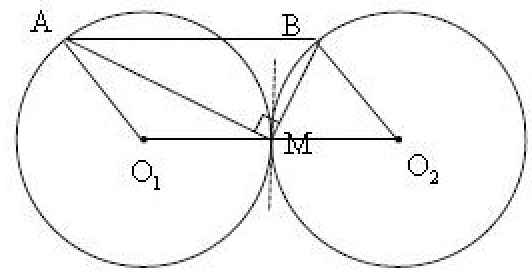
צ"ל: א. $\Delta ABC \sim \Delta FDA$ **ב.** $\angle CDM = \angle MDF$ **ג.** $\frac{MC}{MF} = \frac{AC}{AF}$

הסבר		טענה	נימוק
1	4	ABCD **טרפז שווה שוקיים**	**נתון**
1	5	$BC \parallel AD$	**נתון**
5	6	**(ז)** $\angle BCA = \angle CAD = \beta$	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
2	7	$AB \parallel DF$	**נתון**
7	8	**(ז)** $\angle AFD = \angle BAC = \alpha$	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
8 ,6	9	$\Delta ABC \sim \Delta FDA$	**משפט דמיון זווית זווית**
		מ.ש.ל. א	
8 ,6	10	$\angle BAD = \alpha + \beta$	**סכום זוויות**
10 ,4	11	$\angle CDA = \angle BAD = \alpha + \beta$	**זוויות בסיס שוות בטרפז ש"ש + כלל מעבר**
3	12	$\angle MDA = 90°$	**נתון**
12 ,11	13	$\angle CDM = 90° - \alpha - \beta$	**הפרש זוויות**
12 ,6	14	$\angle FMD = 90° + \beta$	**זווית חיצונית ל-** ΔMAD **שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שלא צמודות לה**
14 ,8	15	$\angle MDF = 90° - \alpha - \beta$	**סכום זוויות ב-** ΔFMD **שווה ל-** $180°$
15 ,13	16	$\angle CDM = \angle MDF$	**כלל המעבר**
		מ.ש.ל. ב	
16	17	$\frac{MC}{MF} = \frac{CD}{FD}$	**משפט חוצה זווית** ΔFCD
4	18	$AB = CD$	**שוקיים שוות בטרפז שווה שוקיים**
9	19	$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DA} = \frac{AC}{FA}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
19 ,18 ,17	20	$\frac{AC}{AF} = \frac{MC}{MF}$	**כלל המעבר**
		מ.ש.ל. ג	

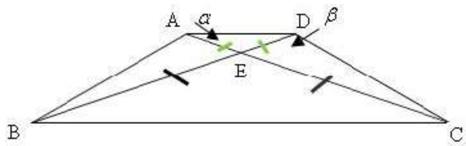
<u>נתונים</u>

1. לשני המעגלים רדיוס R **. 2 . המעגלים משיקים בנקודה** M **. 3.** $\angle AMB = 90°$

צ"ל: א. (1) $\angle O_1MO_2 = 180°$ **(2)** $AO_1 \parallel BO_2$ **ב. אורך התיכון לצלע** AB



הסבר		טענה	נימוק
2	3	המעגלים משיקים בנקודה M	נתון
3	4	O_1M מאונך למשיק משותף	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
3	5	O_2M מאונך למשיק משותף	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
5 ,4	6	$\angle O_1MO_2 = 180°$	סכום זוויות ישרות הוא $180°$ (קטע מרכזים עובר בנקודת השקה !!!)
		מ.ש.ל. א (1)	
	7	$\angle BO_2M = 2\alpha$	סימון
	8	$O_2B = O_2M$	רדיוסים שווים זה לזה
3	9	$\angle AMB = 90°$	נתון
8 ,7	10	$\angle BMO_2 = 90° - \alpha$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔBMO_2 סכום זוויות ב- ΔBMO_2 הוא $180°$
10 ,9 ,6	11	$\angle AMO_1 = \alpha$	הפרש זוויות
	12	$O_1A = O_1M$	רדיוסים שווים זה לזה
12 ,11	13	$\angle AO_1M = 180° - 2\alpha$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔBMO_2 סכום זוויות ב- ΔBMO_2 הוא $180°$
13 ,7	14	$AO_1 \parallel BO_2$	אם זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$ אז ישרים מקבילים
		מ.ש.ל. א (2)	
1	15	לשני המעגלים רדיוס R	נתון
15	16	$AO_1 = BO_2$	רדיוסים שווים בשני המעגלים
16 ,14	17	AO_1O_2B מקבילית	זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות
15 ,6	18	$O_1O_2 = 2R$	השלם שווה לסכום חלקיו
18 ,17	19	$AB = 2R$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
19 ,9	20	אורך התיכון לצלע AB הוא R	התיכון ליתר שווה למחצית היתר



א. $\angle CAD = \alpha$ **(נתון)**

$ABCD$ **טרפז שווה שוקיים (נתון)**

ובהתאם משולשים AED **ו-** BEC **שווי שוקיים, עם זוויות בסיס** α **,**

כי הקטעים היוצאים מבסיסי הטרפז שווים זה לזה ובסיסי הטרפז

מקבילים והזוויות המתאימות שוות

לכן, המשולשים דומים (משפט דמיון ז.ז.) ויחס השטחים הוא כריבוע

יחס הצלעות המתאימות: $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = (\frac{AE}{EC})^2 = (\frac{DE}{EB})^2$

כאמור: $BE = CE$ **, ולכן:** $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = (\frac{DE}{EC})^2$

$\angle ACD = 180° - (2\alpha + \beta)$ **(סכום זוויות במשולש** $180°$ **הוא** ADC **)**

על פי משפט הסינוסים:

$\underline{\Delta DCE}$

$$\frac{DE}{\sin(180° - (2\alpha + \beta))} = \frac{CE}{\sin\beta}$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin\beta}$$

ולכן יחס השטחים הוא $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = \frac{\sin^2(2\alpha + \beta)}{\sin^2\beta}$

ב. נתון כי שורש יחס השטחים הוא $\sqrt{\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}}} = \frac{1}{4}$ **ולכן יחס הצלעות המתאימות הוא** $\frac{1}{4}$**.**

$\alpha = 30°$ **ובהתאם:** $\frac{\sin(60° + \beta)}{\sin\beta} = \frac{1}{4}$

$$\frac{\sin 60° \cos\beta + \cos 60° \sin\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\beta + 0.5 = 0.25 \quad \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\beta = -0.25$$

$$-2\sqrt{3} = \tan\beta$$

$$\boxed{\beta = 106.1°}$$

תשובה: $\beta = 106.1°$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}$ **, או** $f(x)=\frac{x^2+6x+12}{(x-3)^2}$ **המוגדרת בתחום** $x\neq 3$ **.**

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+0+0}{1-0+0}=1$ **, לכן** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית**

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}==\frac{+}{0^+}=+\infty$ **, לכן** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית**

(2) בנקודת חיתוך עם חיתוך עם ציר y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,\frac{4}{3})$

אין נקודת חיתוך עם ציר x **כי הדיסקרימיננטה** (Δ) **של הטרינום הריבועי במונה שלילית.**

תשובה: $(0,\frac{4}{3})$ **.**

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{(2x+6)(x-3)^2-2(x-3)(x^2+6x+12)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-3)((x+3)(x-3)-(x^2+6x+12)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-3)(x^2-9-x^2-6x-12)}{(x-3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-3)(-6x-21)}{(x-3)^4}}$$

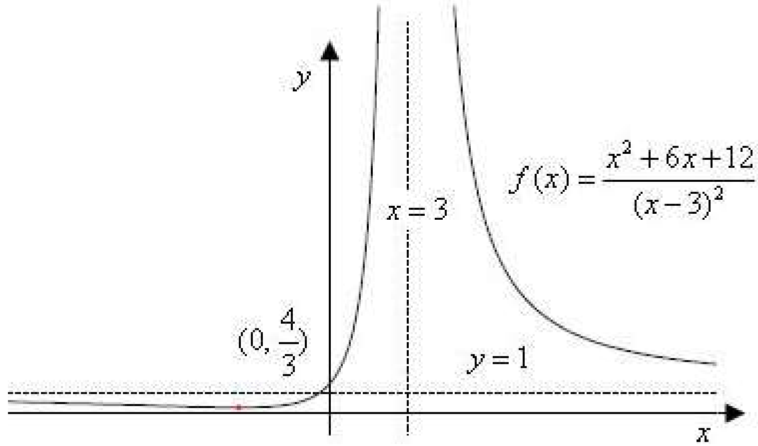
$$0=-6x-21\quad\rightarrow x=-3.5$$

למונה נגזרת הפונקציה פרבולה בעלת מקסימום,

ולכן היא חיובית עבור $-3.5<x<3$ **ושלילית עבור** $x>3$ או $x<-3.5$

תשובה: $x>3$ **או** $x<-3.5$ **ירידה ,** $-3.5<x<3$ **עלייה.**

(4) הסקיצה המתאימה



ב. $f'(x)=\frac{2(x-3)(-6x-21)}{(x-3)^4}$

(1) חזקת פולינום המכנה גדולה מחזקת פולינום המונה ולכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית**

$f'(x)=\frac{2(-6x-21)}{(x-3)^3}$ **, מכאן ש:** $x=3$ **מאפס מכנה ולא מונה ולכן** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית**

(2) נגזרת הפונקציה מתאפסת רק עבור $x=-3.5$ **ולכן זו נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה-** x **.**

כפי שהראינו נגזרת הפונקציה חיובית עבור $-3.5<x<3$ **ושלילית עבור** $x>3$ **או** $x<-3.5$.

$$f'(x)=\frac{2(-6x-21)}{(x-3)^3}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{-6(x-3)^3-3(x-3)^2(-6x-21)}{(x-3)^6}$$

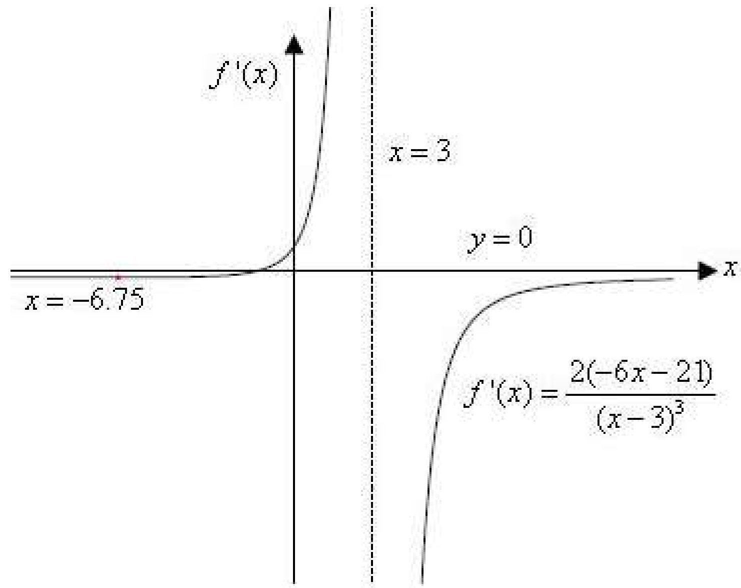
$$f''(x)=6\cdot\frac{-2(x-3)-(-6x-21)}{(x-3)^4}$$

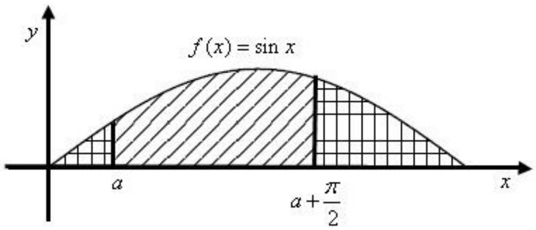
$$f''(x)=6\cdot\frac{-2x+6+6x+21}{(x-3)^4}$$

$$f''(x)=6\cdot\frac{4x+27}{(x-3)^4}$$

$$0=4x+27 \quad \rightarrow x=-6.75$$

והסקיצה המתאימה:





הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *יחס השטחים* $\frac{S_1}{S_2}$

$$S_1 = \int_a^{a+\frac{\pi}{2}} (\sin x - 0)\, dx$$

$$S_1 = (-\cos x)\Big]_a^{a+\frac{\pi}{2}}$$

$$S_1 = -\cos(a+\frac{\pi}{2}) + \cos a$$

$$\boxed{S_1 = \sin a + \cos a} \quad \leftarrow \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$S_2 = \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\, dx - S_1$$

$$S_2 = (-\cos x)\Big]_0^{\pi} - (\sin a + \cos a)$$

$$S_2 = -\cos\pi + \cos 0 - \sin a - \cos a$$

$$\boxed{S_2 = 2 - \sin a - \cos a}$$

$$f(a) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin a + \cos a}{2 - \sin a - \cos a}$$

$$f'(a) = \frac{(\cos a - \sin a)(2 - \sin a - \cos a) - (\sin a + \cos a)(-\cos a + \sin a)}{(2 - \sin a - \cos a)^2}$$

$$f'(a) = \frac{(\cos a - \sin a)(2 - \sin a - \cos a + \sin a + \cos a)}{(2 - \sin a - \cos a)^2}$$

$$\boxed{f'(a) = \frac{2(\cos a - \sin a)}{(2 - \sin a - \cos a)^2}}$$

$$0 = \cos a - \sin a$$

$$\tan a = 1 \quad \leftarrow \cos a, \sin a \neq 0 \quad \leftarrow 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$a = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{4}} \leftarrow k = 0$$

פתרונות אחרים לא בתחום האפשרי $0 < a < \frac{\pi}{2}$ **.**

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{2(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6})}{+} = \frac{0.73}{+} > 0, \quad f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{2(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3})}{+} = \frac{-0.73}{+} < 0$$

הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן, עבור $a = \frac{\pi}{4}$ **יחס השטחים** $\frac{S_1}{S_2}$ **הוא מקסימלי.**

תשובה: $a = \frac{\pi}{4}$

פתרון חלופי: ניתן לשים לב כי כאשר S_1 **גָּדֵל, אז** S_2 **קָטֵן, ולכן** $\frac{S_1}{S_2}$ **מקסימלי.**

$$S_1 = \sin a + \cos a \quad \to S_1' = \cos a - \sin a$$

$$S_1' = 0 \quad \to \cos a = \sin a = 0 \quad \to \tan a = 1 \quad \to \boxed{a = \frac{\pi}{4}}$$

$$S_1'' = -\sin a - \cos a \quad \to S_1'(\frac{\pi}{4}) < 0 \quad \to Max$$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}$

נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0

$x^2-15>0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=\pm\sqrt{15}$

תשובה: תחום ההגדרה: $x>\sqrt{15}$ **או** $x<-\sqrt{15}$

ב. נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{15}{x^2}}}$$

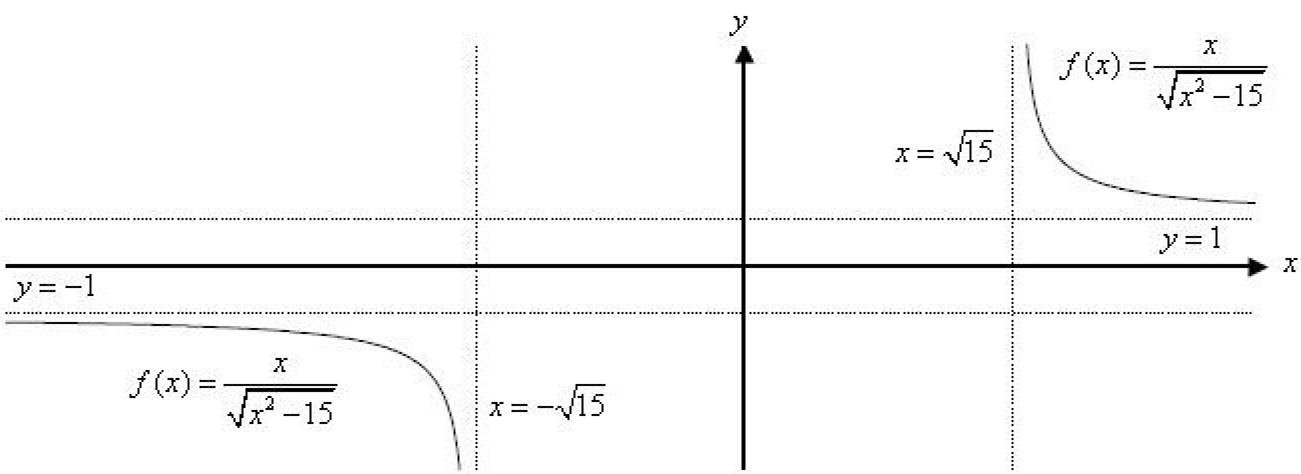
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{15}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{15}{x^2}}\to 1}=1 \quad\to \boxed{y=1} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{15}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{15}{x^2}}\to 1}=-1 \quad\to \boxed{y=-1}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{15}^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{15}}{0^+}=+\infty \quad\to \boxed{x=\sqrt{15}} \qquad \lim_{x\to-\sqrt{15}^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{15}}{0^+}=-\infty \quad\to \boxed{x=-\sqrt{15}}$$

תשובה: אסימפטוטות אופקיות: $y=1$ **,** $y=-1$ **, האסימפטוטות אנכיות:** $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$

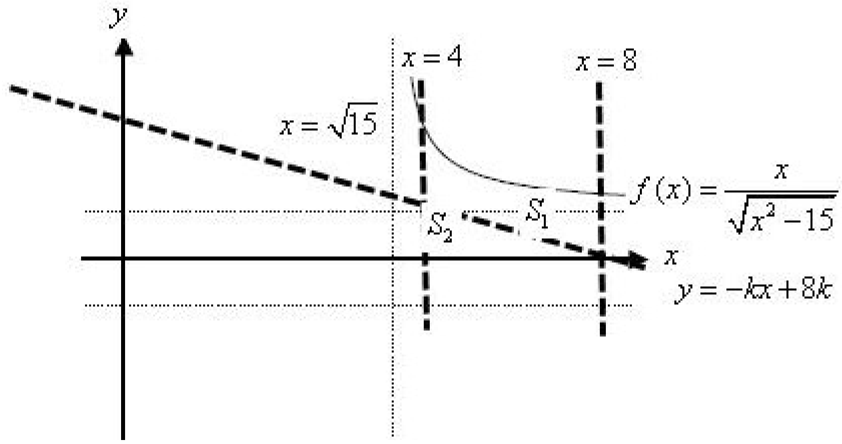
ג. נתון כי הפונקציה יורדת בכל תחום שבו היא מוגדרת, כלומר עבור $x>\sqrt{15}$ **או** $x<-\sqrt{15}$

ובהתאם הסקיצה המתאימה:



ג. הישר $y=-kx+8k$ **חותך את ציר ה-** x **בנקודה** $(8,0)$ **ושיפועו שלילי כי** $k>0$

כמו כן נתון כי אינו חותך את גרף הפונקציה ובהתאם זו הסקיצה המתאימה:



S_2 **הוא שטח של משולש ישר זווית, שאורכי ניצביו:** $8-4=4$ **ו-** $-k\cdot 4+8k-0=4k$ **.**

בהתאם: $S_2=\frac{4\cdot 4k}{2}=8k$ **.**

S_1 **הוא ההפרש בין השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה** $f(x)$ **, על ידי ציר ה-** x **,**

ועל ידי הישרים $x=4$ **ו-** $x=8$ **לבין** $S_2=8k$ **.**

נשתמש באינטגרל על-ידי זיהוי הנגזרת הפנימית (של הביטוי שבתוך השורש הריבועי):

$$S_1=\int_4^8 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}-0\right)dx-8k$$

$$S_1=\int_4^8 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-15}}\cdot 2x\right)dx-8k$$

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-15}\right)\Big]_4^8-8k$$

$$S_1=\left(\sqrt{8^2-15}\right)-\left(\sqrt{4^2-15}\right)-8k$$

$$S_1=6-8k$$

נתון כי השטחים שווים

$$8k=6-8k$$

$$16k=6$$

$$\boxed{k=0.375}$$

תשובה: $k=0.375$