א. נסמן ב- x את מהירות רוכב האופניים שיצא ממושב A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות רוכב האופניים שיצא ממושב B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק ממושב A עד מושב B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
יום אחד	מ- A עד מפגש	$\frac{3s}{4x}$	x	$\frac{3s}{4}$
	מ- B עד מפגש	$\frac{s}{4y}$	y	$\frac{s}{4}$
יום אחר	מ- A עד מפגש	$\frac{s}{2x}$	x	$\frac{s}{2}$
	מ- B עד מפגש	$\frac{s}{2y}$	y	$\frac{s}{2}$

ביום הראשון זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- B קטן בחצי שעה והמשוואה המתאימה היא $\frac{3s}{4x}=\frac{s}{4y}+0.5$.

ביום האחר זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A קטן בחצי שעה והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}$.

$$\begin{cases}\frac{3s}{4x}=\frac{s}{4y}+0.5\\[2mm] \frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}\end{cases}$$

$$+\begin{cases}\frac{3s}{4x}-0.5=\frac{s}{4y}\\[2mm] \frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}\end{cases}$$

$$\frac{5s}{4x}=\frac{3s}{4y} \quad /:\frac{S}{4}>0$$

$$\frac{5}{x}=\frac{3s}{y}$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{5}{3}}$$

תשובה: היחס בין מהירות הרוכב הראשון למהירות הרוכב השני הוא $5:3$.

ב. כאשר שניהם יוצאים באותו זמן, ויחס המהירויות הוא $5:3$**, הרי שייפגשו במרחק** $\frac{5}{8}S$ **מ-** A **,**

כלומר במרחק של $\frac{1}{8}S$ **מאמצע הדרך.**

לכן $\frac{1}{8}S=b \quad \rightarrow \boxed{S=8b}$

תשובה: המרחק ממושב A **למושב** B **- הוא** $8b$ **(ק"מ).**

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $1^3=1$ **אגף שמאל:** $1^2=1$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=(1+2+3+...+k)^2$ **,**

או על פי נוסחת סכום של סדרה חשבונית: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=(\frac{k(1+k)}{2})^2$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$(\frac{(k+1)(1+k+1)}{2})^2=\underbrace{1^3+2^3+3^3+...+k^3}_{\downarrow}+(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=(\frac{k(1+k)}{2})^2+(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$**, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

ב. נתון כי $1^3+2^3+3^3+...+n^3=5,833,225$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א $(1+2+3+...+n)^2=5,833,225$

ולכן $1+2+3+...+n=1,415$

$$\frac{n(1+n)}{2}=1,415 \quad \rightarrow n^2+n-4,830=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm139}{2} \quad \rightarrow \boxed{n=69} \quad \leftarrow n>0$$

תשובה: 69 **מחוברים.**

<u>הערה</u>

קיימות שתי נוסחאות של סכומים שראוי לזכור ומסייעות בתרגילי סדרות.

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ **וגם** $$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

הנוסחה השנייה מוכיחה את הטענה ישירות, אולם לא ניתן להשתמש בה כי היא לא בתוכנית לימודים, וההוכחה שלה היא תרגיל כשלעצמו בנושא הסדרות.

א. נגדיר את המאורעות הבאים: S **- קבוצת האנשים**

A **- גברים** $\overline{A}$ **- נשים**

B **- בעלי רישיון נהיגה** $\overline{B}$ **- אינם בעלי רישיון נהיגה**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$N(S)=40$

$$N(A)=16 \quad \rightarrow P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{16}{40}=0.4 \quad \rightarrow P(\overline{A})=0.6$$

$$N(B)=12+16=28 \quad \rightarrow P(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{28}{40}=0.7 \quad \rightarrow P(\overline{B})=0.3$$

$$N(A\cap B)=12 \quad \rightarrow P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(S)}=\frac{12}{40}=0.3$$

$$N(\overline{A}\cap B)=16 \quad \rightarrow P(\overline{A}\cap B)=\frac{N(\overline{A}\cap B)}{N(S)}=\frac{16}{40}=0.4$$

תשובה: ההסתברות שיבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה 0.7 **.**

ב. כיוון שהאדם שנבחר באקראי חוזר לקבוצה הרי שההסתברויות לא משתנות לקראת הבחירה השנייה.

ההסתברות לבחירה של בעל רישיון נהיגה אחד לפחות, היא המאורע המשלים לבחירת שניים ללא רישיון.

$P=1-0.3^2=0.91$

תשובה: ההסתברות שלפחות פעם אחת ייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה היא 0.91 **.**

ג. מאורעות A **ו-** B **אינם תלויים אם** $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$ **.**

על פי נתוני התרגיל, $P(A)\cdot P(B)=0.4\cdot 0.7=0.28\neq P(A\cap B)=0.3$ **.**

תשובה: לא, המאורעות "לבחור מהקבוצה גבר" ו"לבחור מהקבוצה אדם שיש לו רישיון נהיגה" הם תלויים.

ד. אם מספר חברי הקבוצה, מספר הגברים ומספר הגברים בעלי רישיון נהיגה לא משתנה,

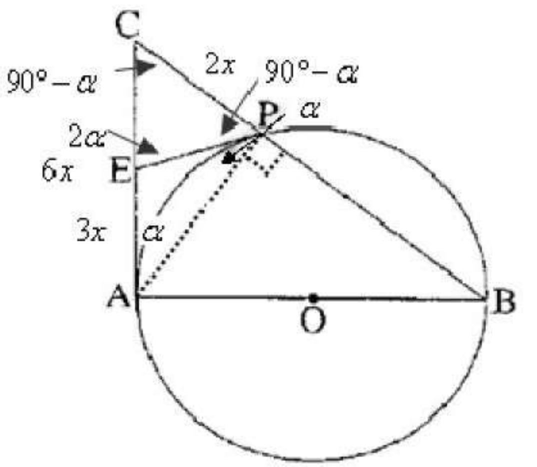
הרי ש- $P(A)=0.4, \quad P(A\cap B)=0.3,$ **ללא שינוי.**

לכן, על מנת המאורעות יהיו בלתי תלויים נדרש: $0.4\cdot P(B)=0.3 \quad \rightarrow P(B)=0.75$ **.**

כלומר ש- 75% **מחברי הקבוצה יהיו בעלי רישיון נהיגה, ומכאן שמספרם:** $0.75\cdot 40=30$ **.**

מכאן שמספר הנשים שצריכות להיות בעלות רישיון נהיגה הוא $30-12=18$ **.**

תשובה: ל- 18 **נשים צריך להיות רישיון נהיגה, על מנת שהמאורעות יהיו בלתי תלויים.**



<u>נתונים</u>

1. $\sphericalangle CAB = 90°$ **2.** AB **קוטר במעגל שמרכזו** O

3. EP **משיק למעגל בנקודה** P.

עבור ב: 4. $\frac{CP}{EA} = \frac{2}{3}$ **5.** $S_{\Delta CPE} =$ 2 **סמ"ר**

צ"ל: א. $CE = EA$ **ב.** $S_{\Delta PAB}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$\sphericalangle CAB = 90°$	נתון
2	7	AB **קוטר במעגל שמרכזו** O	נתון
7	8	EA **משיק למעגל בנקודה** A.	מאונך לקוטר בנקודה שעל המעגל
3	9	EP **משיק למעגל בנקודה** P.	נתון
8, 9	10	$EP = EA$	אם מנקודה (E) יוצאים שני משיקים למעגל אז אורכיהם שווים זה לזה.
	11	$\sphericalangle EAP = \alpha$	סימון
10	12	$\sphericalangle EPA = \sphericalangle EAP$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔEAP
11, 12	13	$\sphericalangle EPA = \alpha$	כלל המעבר
7	14	$\sphericalangle APB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
13, 14	15	$\sphericalangle CPE = 90° - \alpha$	הפרש זוויות
11, 13	16	$\sphericalangle CEP = 2\alpha$	זווית חיצונית ל- ΔEAP שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה
15, 16	17	$\sphericalangle ECP = 90° - \alpha$	סכום זוויות ΔCEP $180°$
15, 17	18	$\sphericalangle ECP = \sphericalangle CPE$	כלל המעבר
18	19	$CE = EP$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔCEP
10, 19	20	$CE = EA$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א	
5	21	$S_{\Delta CPE} =$ 2 **סמ"ר**	נתון
20	22	$\frac{AC}{CE} = \frac{2}{1}$	חישוב

הסבר	מס'	טענה	נימוק
21, 22	23	4 סמ"ר $S_{\Delta CAP}=2S_{\Delta CPE}=$	לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות שהיחס ביניהן $2:1$
8	24	$CP\cdot CB=(CA)^2$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצא משיק וחותך למעגל, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק
4	25	$\frac{CP}{EA}=\frac{2}{3}$	נתון
	26	$CP=2x$	סימון
25, 26	27	$EA=3x$	הצבה וחישוב
20, 27	28	$AC=6x$	חישוב
24, 26, 28	29	$2x\cdot CB=(6x)^2$ $CB=18x$	הצבה וחישוב
26, 29	30	$PB=16x$	הפרש קטעים
26, 30	31	$\frac{PB}{CP}=\frac{16x}{2x}=\frac{8}{1}$	חישוב
23, 31	32	32 סמ"ר $S_{\Delta PAB}=8\cdot S_{\Delta CAP}=$	לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות שהיחס ביניהן $8:1$
		מ.ש.ל. ב	

ניתן לפתור גם באמצעות כלים טריגונומטריים

מציאת ערך $\sphericalangle C$ **ב-** ΔCAP

$$\cos\sphericalangle C=\frac{1}{3}\quad\rightarrow\sphericalangle C=70.53^\circ$$

בעזרת נוסחת השטח , ΔCEP **, נמצא את ערכו של** x

$$2=0.5\cdot 2x\cdot 3x\cdot\sin 70.53^\circ$$
$$x=0.8409$$

ובהתאם: $AC=6\cdot 0.8409=5.0454$

מציאת ערך הקוטר ב- ΔABC

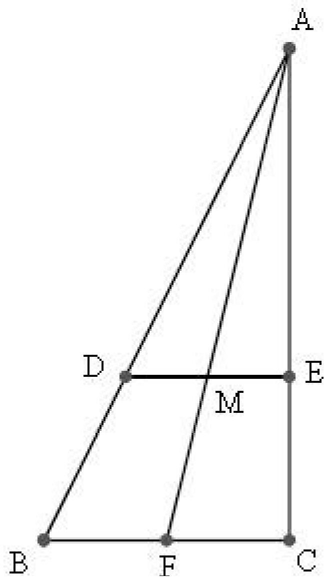
$$\tan 70.53^\circ=\frac{AB}{5.0454}$$
$$AB=14.27$$

מציאת שטח ΔABC

$$\frac{14.27\cdot 5.0454}{2}=36$$

4 **סמ"ר** $S_{\Delta CAP}=2S_{\Delta CPE}$ **לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות שהיחס ביניהן** $2:1$

32 **סמ"ר** $S_{\Delta PAB}=$ **הפרש שטחים**



<u>נתונים</u>

1. $\measuredangle ACB = 90°$

2. AF **תיכון לצלע** BC

3. M **נקודת מפגש תיכונים** ΔABC

4. $DE \parallel BC$

עבור ב:

5. DC **חוצה זווית** ACB

צ"ל:

א. $\frac{DE}{BC}$

ב. הזוויות החדות ב- ΔABC

הסבר		טענה	נימוק
2	**6**	AF **תיכון לצלע** BC	**נתון**
3	**7**	M **מפגש תיכונים** ΔABC	**נתון**
7 ,6	**8**	$\frac{AM}{AF} = \frac{2}{3}$	**תיכונים חותכים זה את זה ביחס** $2:1$ **וכללי פרופורציה**
4	**9**	$DE \parallel BC$	**נתון**
9 ,8	**10**	$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$	**משפט תאלס הרחבה 1** ΔABF
10 ,9	**11**	$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$	**משפט תאלס הרחבה 1** ΔABC
		מ.ש.ל. א	

ב. <u>ולעבודת הטריגו</u>

DC **חוצה זווית** ACB **(נתון)**

$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ **(כללי פרופורציה)**

$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ **(משפט חוצה זווית** ΔABC **)**

$\tan \measuredangle B = \frac{AC}{BC} = 2$

$\measuredangle B = 63.43°$

$\measuredangle A = 26.57°$ **(סכום זוויות** ΔABC $180°$**)**

תשובה: הזוויות החדות ב- ΔABC **הן** $\measuredangle B = 63.43°$ **,** $\measuredangle A = 26.57°$

א. נמצא תחילה את גודלה של $\sphericalangle C$ על פי המשוואה הנתונה.

$$\sphericalangle(\sin\sphericalangle C)^2=\sin(90^\circ-\sphericalangle C)$$
$$1-(\cos\sphericalangle C)^2=\cos\sphericalangle C$$
$$(\cos\sphericalangle C)^2+\cos\sphericalangle C-1=0 \quad \rightarrow (\cos\sphericalangle C)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$(\cos\sphericalangle C)_1=0.618 \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle C=51.83^\circ}$$
$$(\cos\sphericalangle C)_2<-1 \quad \rightarrow \varnothing \quad \leftarrow 0<\cos\sphericalangle C<1$$

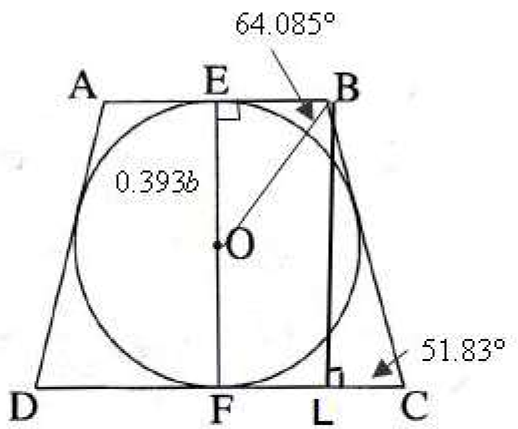
$BL\perp CD$ **(בניית עזר)**

EF **קוטר המעגל שמרכזו** O **החסום בטרפז (נתון)**

$\sphericalangle BEF=\sphericalangle EFC=90^\circ$ **(הקוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה)**

$BEFL$ **מלבן (מרובע עם שלוש זוויות ישרות הוא מלבן)**

$BL=2r$ **(צלעות נגדיות שוות במלבן)**



$\underline{\Delta BCL}$

$$\frac{BL}{BC}=\sin\sphericalangle C\Rightarrow\frac{2r}{b}=\sin 51.83^{O}$$
$$r=\frac{b\cdot\sin 51.83^{O}}{2}=0.393b$$

תשובה: רדיוס המעגל החסום הוא $0.393b$ **יחידות.**

ב. נמצא את אורכו של הבסיס הקטן AB.

$\sphericalangle ABC=128.17^\circ$ **(סכום זוויות חד צדדיות בין מקבילים הוא** 180°**)**

$\sphericalangle EBO=\frac{128.17^\circ}{2}=64.085^\circ$ **(מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות)**

$\underline{\Delta EBO}$

$$\tan\sphericalangle EBO=\frac{r}{EB}$$
$$\tan 64.085^\circ=\frac{0.393b}{EB}$$
$$EB=\frac{0.393b}{\tan 64.085^\circ}$$
$$EB=0.191b$$

כיוון שזוויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות זו לזו,

אז גם חצאי הזוויות יהיו שווים,

ומכאן ש- ΔAOB **שווה שוקיים ולכן הגובה** OE **הוא גם תיכון ו-** $AB=2BE$.

$$\boxed{AB=0.382b}$$

תשובה: אורכו של הבסיס הקטן $AB=$ $0.382b$ **יחידות.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\frac{1}{\cos x}}$

פונקציה זוגית אם $f(-x)=f(x)$

$$\cos x=\cos(-x)\quad\to f(-x)=\frac{1}{\cos(-x)}=\frac{1}{\cos x}=f(x)$$

תשובה: הוכח.

ב. בתחום $0\le x\le 2\pi$

(1) תחום הגדרה : $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ **כי מכנה שונה מ-** 0

ולכן בתוך התחום $x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטות אנכיות** $\to\quad \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\pm\infty$

תשובה: תחום ההגדרה, $x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ $0\le x\le 2\pi$ **, אסימפטוטות אנכיות** $x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$

(2) נמצא את נקודות הקיצון.

נקודות הקצה: $f(0)=\frac{1}{\cos 0}=1\quad\to(0,1),\quad f(2\pi)=\frac{1}{\cos 2\pi}=1\quad\to(2\pi,1)$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$\sin x=0\quad\to x=\pi k$$

ועבור $k=1$ **נקבל נקודה פנימית** $x=\pi$ **החשודה כקיצון** $(\pi,-1)\quad\to\ f(\pi)=\frac{1}{\cos\pi}=-1$.

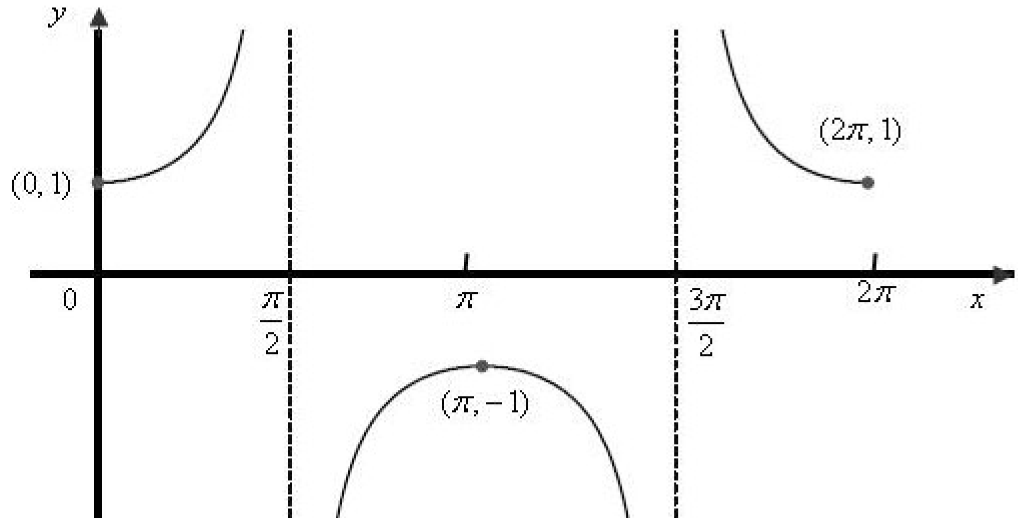
נבנה טבלת עלייה וירידה, בעזרת ערכי הנגזרת, כאשר מכנה הנגזרת חיובי

$$f'(\frac{\pi}{6})=\frac{0.5}{+}>0,\quad f'(\frac{2\pi}{3})=\frac{0.866}{+}>0,\quad f'(\frac{4\pi}{3})=\frac{-0.866}{+}>0,\quad f'(\frac{11\pi}{6})=\frac{-0.5}{+}<0$$

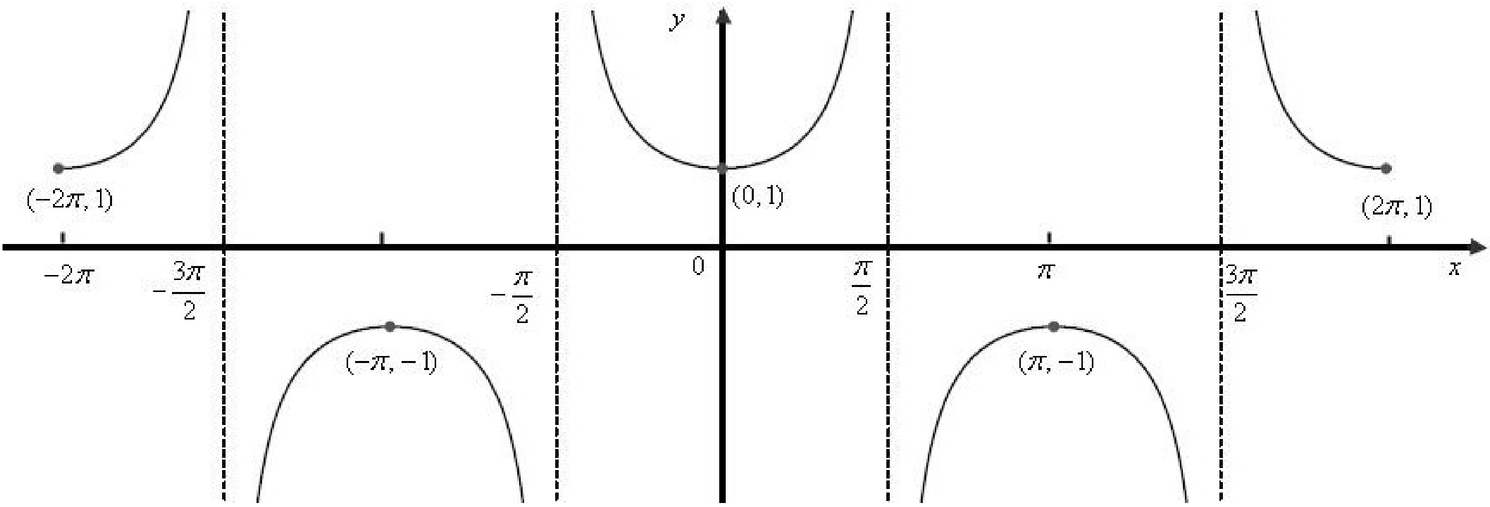
x	2π	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0
$f'(x)$	קצה	$-$		$-$	0	$+$		$+$	קצה
מקסום	**Min**	↘		↘	**max**	↗		↗	**min**

תשובה: $(0,1)$ **מינימום ,** $(\pi,-1)$ **מקסימום ,** $(2\pi,1)$ **מינימום**

(3) הסקיצה בתחום $0 \le x \le 2\pi$



ג. עקב זוגיות הפונקציה, הרי שקיימת סימטריה לציר ה- y **ובהתאם הסקיצה המבוקשת.**

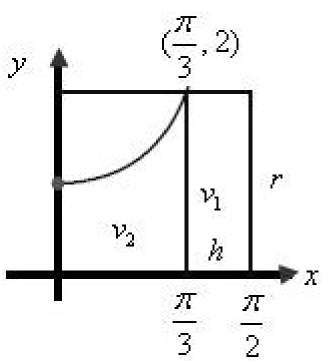


ד. נחשב את הנפח המבוקש:

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \to \cos x=0.5 \quad \to \frac{1}{\cos x}=2$ **ועבור** $k=0$ **נקבל את שיעורי נקודת החיתוך בתחום** $(\frac{\pi}{3},2)$ **.**

נחלק את גוף הסיבוב לשני חלקים.

v_1 **הוא מלבן, כאשר גוף הסיבוב הנוצר הוא גליל , שרדיוסו** 2 **וגובהו** $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$ **ובהתאם נחשב את נפחו.**



$$v_1=\pi r^2 h=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$v_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 dx$$

$$v_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$v_2=\pi\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$v_2=\pi\tan\frac{\pi}{3}-\pi\tan 0$$

$$\boxed{v_2=\pi\sqrt{3}}$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $\frac{2}{3}\pi^2+\pi\sqrt{3}=12.02$ **יח"ק.**

ה. נמצא את נקודות הקיצון בתחום $-\infty<x<\infty$

המחזוריות של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ **זהה למחזוריות של הפונקציה** $y=\cos x$ **, כלומר מחזוריות של** $2\pi k$ **.**

(1) $(2\pi k,1)$ **מינימום.**

(2) $(\pi+2\pi k,-1)$ **מקסימום.**

ניתן להסביר גם באמצעות סימני הנגזרת השנייה:

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}} \to f''(x)=\frac{\cos^3 x+2\cos x\sin^2 x}{\cos^4 x} \to \boxed{f''(x)=\frac{\cos x(\cos^2 x+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}}$$

הנגזרת הראשונה מתאפסת עבור $x=\pi k$ **, כאשר** $\sin x=0$ **ובהתאם** $\cos x=\pm 1$ **.**

מכנה הנגזרת השנייה חיובי וערך הביטוי שבתוך הסוגריים חיובי.

לכן סימן הנגזרת השנייה נקבע בהתאם לסימן של $\cos x$

(1) עבור $x=2\pi k \quad \cos x=1>0$ **ולכן סימן הנגזרת השנייה חיובי כלומר** $\cup$ **, ואלו נקודות מינימום.**

תשובה: $(2\pi k,1)$ **מינימום.**

(2) עבור $x=\pi+2\pi k \quad \cos x=-1<0$ **ולכן סימן הנגזרת השנייה שלילי, כלומר** $\cap$ **, ואלו נקודות מקסימום.**

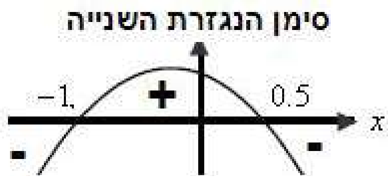
תשובה: $(\pi+2\pi k,-1)$ **מקסימום.**

א. נמצא את תחומי החיוביות/ שליליות של $f''(x)=\frac{-6x^2-3x+3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ **,**

שהם גם תחומי הקעירות/ קמירות של $f(x)$ **וגם תחומי העלייה/ ירידה של** $f'(x)$ **.**

$-6x^2-3x+3=0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{-12} \quad \to x=-1,\ x=0.5$

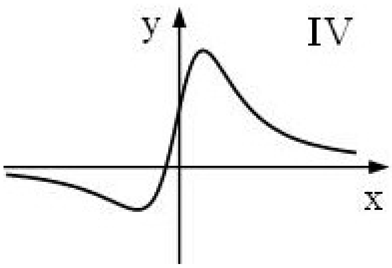


מכנה הנגזרת השנייה חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה נקבע בהתאם למונה.

הביטוי $-6x^2-3x+3$ **הוא של פרבולה הפוכה, כמתואר משמאל.**

$f''(x)>0$ **עבור** $-1<x<0.5$ **ובתחום זה** $f'(x)$ **עולה.**

$f''(x)<0$ **עבור** $x>0.5$ **או** $x<-1$ **ובתחומים אלו** $f'(x)$ **יורדת.**



תשובה: גרף IV **הוא הגרף המתאים.**

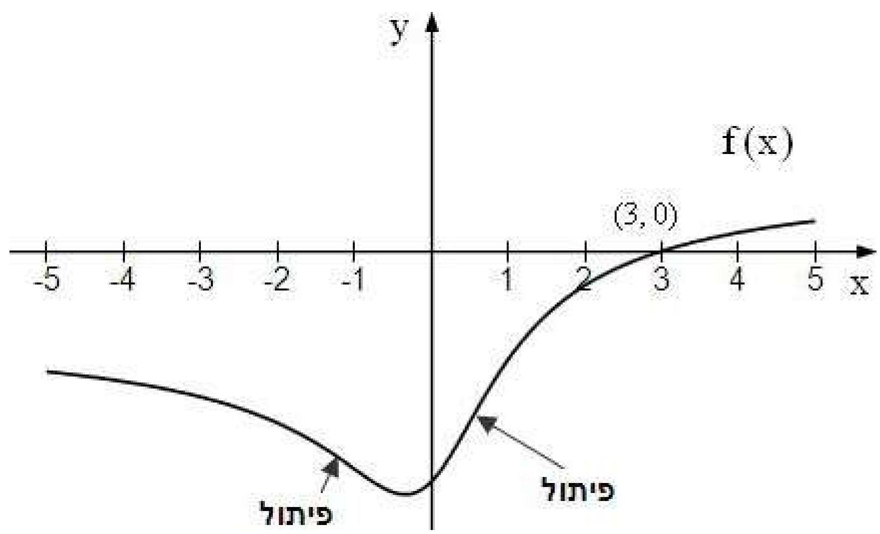
ב. (1) התשובה,על פי ההסבר בסעיף הקודם, בהתאם לתחומי חיוביות שליליות של $f''(x)$

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ $-1<x<0.5$ **, קעירות כלפי מטה** $\cap$ $x>0.5$ **או** $x<-1$ **.**

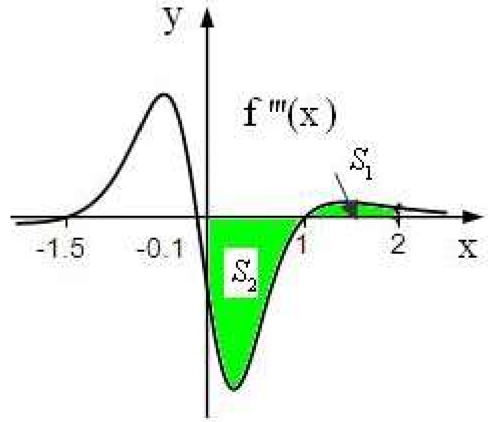
(2) ניתן לראות על פי גרף IV **כי בין** -1 **ל-** 0 $f'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות ולכן נקודת מינימום.**

תשובה: בין -1 **ל-** 0 **נמצאת נקודת הקיצון (מינימום) של** $f(x)$ **.**

(3) נתון כי $(3,0)$ **נקודת חיתוך יחידה, ובהתאם על פי תתי סעיפים (1) ו- (2) סקיצה של** $f(x)$



ג. נחשב כל שטח בנפרד



$$S_1=\int_1^2 (f'''(x)-0)\,dx = f''(x)\Big]_1^2 = f''(2)-f''(1)=\frac{-6\cdot 2^2-3\cdot 2+3}{\sqrt{(1+2^2)^5}}-\frac{-6\cdot 1^2-3\cdot 1+3}{\sqrt{(1+1^2)^5}}=-0.483-(-1.061)=0.578$$

$$S_2=\int_0^1 (0-f'''(x))\,dx=-f''(x)\Big]_0^1=-f''(1)+f''(0)=1.061+3=4.061$$

$$S=S_1+S_2=0.578+4.061=4.639$$

תשובה: **גודל השטח הוא** 4.639 **יח"ר.**

א. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך A **בין הפרבולה הישרה** $g(x)=x^2-x$ **, שעוברת בראשית ובנקודה** $(1,0)$ **,**

לבין הפרבולה ההפוכה $g(x)=-a^2x^2$ **, שקדקודה בראשית הצירים. הפרבולות נפגשות גם ב-** O **, ראשית הצירים.**

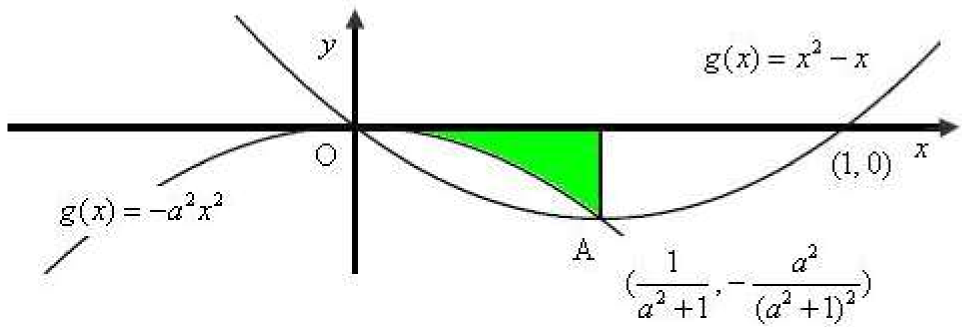
$$-a^2x^2=x^2-x \quad /:x_A>0$$

$$-a^2x=x-1 \quad \rightarrow 1=(a^2+1)x$$

$$x=\frac{1}{a^2+1} \quad \rightarrow y=-\frac{a^2}{(a^2+1)^2} \quad \rightarrow \boxed{A(\frac{1}{a^2+1},-\frac{a^2}{(a^2+1)^2})}$$

תשובה: $A(\frac{1}{a^2+1},-\frac{a^2}{(a^2+1)^2})$

ב. הפונקציה שיש להביא למקסימום **היא** השטח הצבוע בירוק **.**



$$S=\int_0^{\frac{1}{a^2+1}}(0+a^2x^2)\,dx$$

$$S=\frac{a^2x^3}{3}\Big]_0^{\frac{1}{a^2+1}}$$

$$S=\frac{1}{3}(a^2(\frac{1}{a^2+1})^3-a^2\cdot 0^3$$

$$\boxed{S=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{(a^2+1)^3}}$$

זו פונקציית השטח, כאשר שיעור ה- x **של הנקודה** A **הוא בתחום** $0<x<1$ **.**

$$\boxed{S=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{(a^2+1)^3}}$$

$$S'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a(a^2+1)^3-3(a^2+1)^2\cdot 2a\cdot a^2}{(a^2+1)^6}$$

$$S'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a(a^2+1-3a^2)}{(a^2+1)^4}$$

$$\boxed{S'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a(1-2a^2)}{(a^2+1)^4}}$$

$$0=1-2a^2$$

$$a=\pm\sqrt{0.5}$$

$$S'(-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(-1)\cdot(1-2\cdot(-1)^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{+}{+}>0,\quad S'(-0.5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(-0.5)\cdot(1-2\cdot(-0.5)^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-}{+}<0\quad\rightarrow Max$$

$$S'(0.5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 0.5\cdot(1-2\cdot 0.5^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{+}{+}>0,\quad S'(1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot(1-2\cdot 1^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-}{+}<0\quad\rightarrow Max$$

$$x_A=\frac{1}{1+0.5}=\frac{2}{3}\quad\rightarrow y_A=\frac{-0.5}{(1+0.5)^2}=-\frac{2}{9}\quad\rightarrow\boxed{A(\frac{2}{3},-\frac{2}{9})}$$

גם עבור $a=+\sqrt{0.5}$ **וגם עבור** $a=-\sqrt{0.5}$ **מתקבל מקסימום, שכן הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, ופונקצית השטח מעלייה לירידה.**

עבור שני ערכים אלו מתקבלים שיעורים זהים של הנקודה $A(\frac{2}{3},-\frac{2}{9})$ **.**

תשובה: שיעורי הנקודה $A(\frac{2}{3},-\frac{2}{9})$ **, עבורם השטח המבוקש מקסימלי.**