א. נסמן ב- x את הזמן (בשעות) שהצינור הזרים מים עד ההפסקה.

פועל	הספק לשעה (מ"ק לשעה)	זמן (שעות)	עבודה (מ"ק כולל)
עד ההפסקה	$\frac{10}{x}$	x	10
הפסקה	-	$\frac{1}{3}$	-
אחרי ההפסקה	$\frac{10}{x}+3=\frac{10+3x}{x}$	$\frac{20x}{10+3x}$	20
30 **מ"ק רצוף**	$\frac{10}{x}$	$3x$	30

הזמן שהצינור הזרים מים, כולל ההפסקה שווה לזמן שהיה נדרש לו למלא 30 מ"ק ללא הפסקה בקצב המקורי.

נפתור את המשוואה המתאימה.

$$3x = x+\frac{1}{3}+\frac{20x}{10+3x}$$

$$2x=\frac{1}{3}+\frac{20x}{10+3x} \quad /3(10+3x)$$

$$6x(10+3x)=10+3x+60x$$

$$60x+18x^2=10+63x$$

$$18x^2-3x-10=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 27}{36} \quad \rightarrow x=\frac{5}{6}, \quad \cancel{x=-\frac{2}{3}} \quad \Leftarrow x>0$$

תשובה: הצינור הזרים מים עד ההפסקה במשך $\frac{5}{6}$ שעה (50 דקות).

ב. הצינור ממלא כל שעה $\frac{10}{5/6}=12$ **מ"ק מים.**

במשך 18 **שעות הוא ממלא שליש בריכה, כלומר בריכה מלאה ב-** 54 **שעות,**

ומכאן שנפח הבריכה $54\cdot 12=648$ **מ"ק מים.**

שני הברזים מזרימים מים בקצב אחיד ובאותו פרק זמן, מכאן שכל אחד מהם ממלא $648:2=324$ **מ"ק מים.**

נסמן ב- y **(שעות) את הזמן שבו שני הצינורות ממלאים את הבריכה,**

ולכן $\frac{324}{y}$ **הוא ההספק לשעה של כל אחד מהצינורות,**

כאשר הספק הצינור המקורי היה 12 **מ"ק לפני ההפסקה ו-** 15 **מ"ק לאחר ההפסקה.**

$$12<\frac{324}{y}<15$$

$$\boxed{21.6<y<27}$$

תשובה: תחום השעות, של הזמן ששני הצינורות ממלאים את הבריכה, הוא בין 21.6 **ל-** 27 **שעות.**

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לפי כלל נסיגה של סדרה חשבונית

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad \to d = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n + 3 \quad \to d = 3 \end{cases}.$$

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{1}{2(3\cdot 1+2)} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{10}$ **אגף שמאל:** $\frac{1}{a_1\cdot b_1} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{10}$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+\dots+\frac{1}{a_k\cdot b_k} = \frac{k}{2(3k+2)}$ **,**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**.**

כלומר, $\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+\dots+\frac{1}{a_k\cdot b_k}+\frac{1}{a_{k+1}\cdot b_{k+1}} = \frac{k+1}{2(3(k+1)+2)}$

נחליף, את הביטוי המסומן, על פי הנחת האינדוקציה

$$\underbrace{\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+\dots+\frac{1}{a_k\cdot b_k}}_{\downarrow}+\frac{1}{a_{k+1}\cdot b_{k+1}} = \frac{k+1}{2(3(k+1)+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{a_{k+1}\cdot b_{k+1}} = \frac{k+1}{2(3k+5)}$$

נחשב את הביטויים על פי נוסחת איבר כללי של סדרה חשבונית

$$a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)d = 2+3k \quad ,b_{k+1} = b_1 + (k+1-1)d = 5+3k$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)\cdot(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)\cdot(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)\cdot(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k+2)}{2(3k+2)\cdot(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3k+5)} \quad \leftarrow 3k^2+5k+2=0, \quad k=-1,\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{2(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3k+5)}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$ **, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

הסבר: פרוק הביטוי $3k^2+5k+2=0$ **ע"י משוואה ריבועית:**

$$3k^2+5k+2=0$$
$$k_{1,2}=\frac{-5\pm1}{6}\quad\rightarrow k=-1,-\frac{2}{3}$$
$$3(k+1)(k+\frac{2}{3})$$
$$(k+1)(3k+2)$$

ב. על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, נקבל:

$$\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_n\cdot b_n}+\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}...+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{2n}{2(6n+2)}$$ **,**

וגם כמובן $$\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_n\cdot b_n}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

לכן,

$$\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}...+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{2n}{2(6n+2)}-\frac{n}{2(3n+2)}$$

" $$=\frac{2n(3n+2)-n(6n+2)}{2(6n+2)(3n+2)}$$

" $$=\frac{6n^2+4n-6n^2-2n}{2(6n+2)(3n+2)}$$

" $$=\frac{2n}{2(6n+2)(3n+2)}$$

" $$=\frac{n}{(6n+2)(3n+2)}$$

לפי נוסחת איבר כללי של סדרה חשבונית

$$a_{2n+1}=a_1+(2n+1-1)d=2+6n\quad,\quad a_{n+1}=a_1+(n+1-1)d=2+3n$$ **,**

ולכן:

$$\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}...+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{n}{a_{n+1}\cdot a_{2n+1}}$$

הוּכַח.

א. קיימות שתי אפשרויות לחלוקת הכדורים(בהנחה שאין הבדל בין הכדים)

(1) בכד אחד שני כדורים לבנים ובאחר כדור שחור: $P(white)=0.5\cdot 1+0.5\cdot 0=0.5$ **.**

(2) בכד אחד כדור שחור וכדור לבן ובאחר כדור לבן: $P(white)=0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 1=0.75$

לפי החישובים הנ"ל ,כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר, יש לחלק את הכדורים לפי אפשרות (2),

כלומר : בכד אחד כדור שחור וכדור לבן ובאחר כדור לבן.

תשובה: בכד אחד כדור שחור וכדור לבן, ובכד האחר כדור לבן

ב. ההסתברות להוצאת כדור לבן, מכד עם שני כדורים לבנים ושלושה שחורים היא $\frac{2}{5}$**.**

(1) זו התפלגות בינומית, כאשר $n=5$ **,** $p=\frac{2}{5}$ **,** $k=2$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P_n(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

$$\mathrm{P}_5(2)=\binom{5}{2}(\frac{2}{5})^2(1-\frac{2}{5})^{5-2}$$
$$\mathrm{P}_5(2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3$$
$$\mathrm{P}_5(2)=10\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3$$
$$\mathrm{P}_5(2)=0.3456$$

תשובה: ההסתברות להוצאת שני כדורים לבנים בדיוק היא 0.3456 **.**

(2) יש להוציא שלושה כדורים לבנים בדיוק, מתוך שישה, כך שהכדור הלבן השלישי יהיה בהוצאה השישית.

לכן יש להוציא בדיוק שני לבנים, מתוך חמשת הראשונים (שאת ההסתברות חישבנו בתת סעיף ב (1)),

וגם שהכדור השישי שנוציא יהיה לבן ($p=\frac{2}{5}$ **) .**

אלו מאורעות בלתי תלויים לכן החיתוך שלהם הוא כפל הסתברויות.

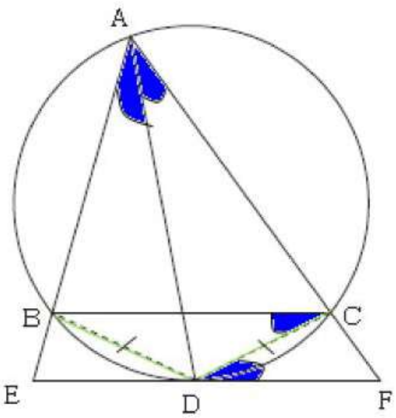
$$\mathrm{P}(\text{3 white out of 6} \cap \text{the 6th is white})=\mathrm{P}_5(2)\cdot \mathrm{P}(\text{ white })$$
$$\mathrm{P}(\text{3 white out of 6} \cap \text{the 6th is white})=0.3456\cdot\frac{2}{5}=0.13824$$

תשובה: ההסתברות היא 0.13824 **.**

<u>נתונים</u>

1. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD$ **2.** EF **משיק למעגל בנקודה** D.

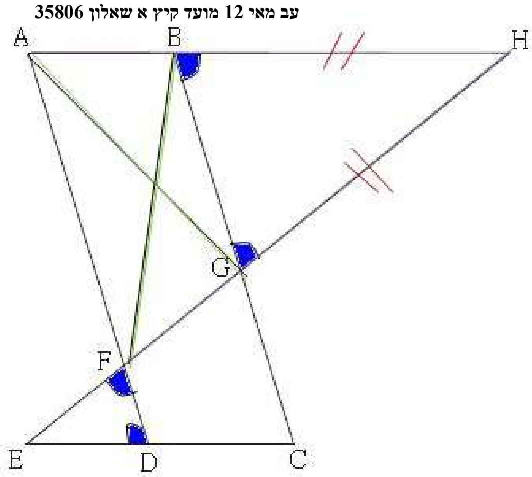
צ"ל: א. $BC \parallel EF$ **ב** $\Delta ABD \sim \Delta DCF$. **ג.** $AD \cdot BD = DF \cdot AB$



הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	3	EF משיק למעגל בנקודה D	נתון
3	4	$\sphericalangle FDC = \sphericalangle FAD$	זווית בין משיק למיתר, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני
1	5	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD$	נתון
	6	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$	על קשתות שוות $(\overset{\frown}{BD})$ נשענות זוויות היקפיות שוות
4, 5, 6	7	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle FDC$	כלל המעבר
7	8	$BC \parallel EF$	אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים
		מ.ש.ל. א	
6, 7	9	$\sphericalangle FDC = \sphericalangle BAD$ (ז)	כלל המעבר
	10	$\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא $180°$
	11	$\sphericalangle FCD + \sphericalangle ACD = 180°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
10, 11	12	$\sphericalangle DCF = \sphericalangle ABD$ (ז)	הצבה
9, 12	13	$\Delta ABD \sim \Delta DCF$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
13	14	$\frac{AB}{DC} = \frac{AD}{DF} = \frac{BD}{CF}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
5	15	$DC = BD$	על זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים
14, 15	16	$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DF}$	הצבה
16	17	$AD \cdot BD = DF \cdot AB$	חישוב
		מ.ש.ל. ג	

5

עב מאי 12 מועד קיץ א שאלון 35806



נתונים

.1 $ABCD$ **מקבילית**   **.2** $ED = EF$

עבור ב.

.3 $FD =$ 2 **ס"מ** **.4** $EF =$ 3 **ס"מ**

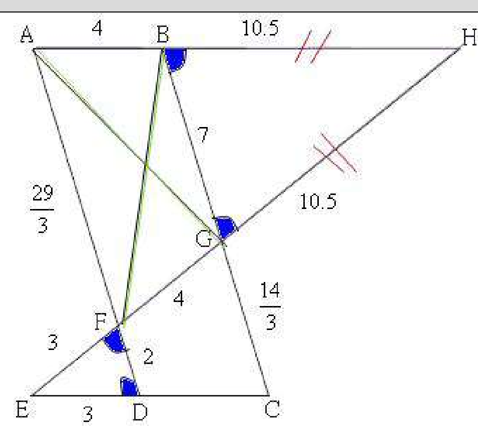
.5 $BG =$ 7 **ס"מ** **.6** $AB =$ 4 **ס"מ**

צ"ל: א. (1) $HG = HB$ **(2)** $\Delta AGH \cong \Delta FBH$.

ב. (1) BH **(2)** $\frac{AF}{GC}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$ABCD$ **מקבילית**	נתון
6	7	$AB \parallel CD$	צלעות נגדיות מקבילות במקבילית
7	8	$\sphericalangle EDF = \sphericalangle HAD$	זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים
1	9	$AD \parallel BC$	צלעות נגדיות מקבילות במקבילית
9	10	$\sphericalangle HBC = \sphericalangle HAD$	זוויות מתאימות שוות בין מקבילים
8, 10	11	$\sphericalangle HBC = \sphericalangle EDF$ (ז)	כלל המעבר
7	12	$\sphericalangle H = \sphericalangle E$ (ז)	זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים
11, 12	13	$\sphericalangle HGB = \sphericalangle DFE$	סכום זוויות במשולש $180°$
2	14	$ED = EF$	נתון
14	15	$\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔEDF
11, 13, 15	16	$\sphericalangle HBC = \sphericalangle HGB$	כלל המעבר
16	17	$HG = HB$ (צ)	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔHBG
		מ.ש.ל. א (1)	
9	18	$AF \parallel BG$	חלקים מישרים מקבילים גם מקבילים
18	19	$\frac{HB}{AH} = \frac{HG}{FH}$	משפט תאלס הרחבה 1
17, 19	20	$AH = FH$ (צ)	חישוב
	21	$\sphericalangle H = \sphericalangle H$ (ז)	זווית משותפת
17, 20, 21	22	$\Delta AGH \cong \Delta FBH$	משפט חפיפה צלע זווית צלע
		מ. ש. ל. א (2)	
3	23	$FD =$ 2 **ס"מ**	נתון
4	24	$EF =$ 3 **ס"מ**	נתון

הסבר	מס'	טענה	נימוק
5	25	BG = 7 ס"מ	נתון
6	26	AB = 4 ס"מ	נתון
11, 12	27	$\Delta EFD \sim \Delta HGB$	משפט דמיון זווית זווית
27	28	$\frac{EF}{HG}=\frac{ED}{HB}=\frac{FD}{GB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
23, 24, 26, 28	29	$\frac{3}{HG}=\frac{2}{7}$	הצבה
29	30	HG = 10.5 ס"מ	חישוב
17, 30	31	BH = 10.5 ס"מ	כלל העברה
		מ.ש.ל. ב (1)	
9	32	$\frac{BG}{AF}=\frac{BH}{AH}$	משפט תאלס הרחבה 1 ΔAHF
26, 30	33	AH = 14.5 ס"מ	חיבור קטעים
25, 31, 33	34	$\frac{7}{AF}=\frac{10.5}{14.5}$	הצבה
34	35	AF = $\frac{29}{3}$ ס"מ	חישוב
23, 35	36	AD = $\frac{35}{3}$ ס"מ	חיבור קטעים
6, 36	37	BC = $\frac{35}{3}$ ס"מ	צלעות נגדיות שוות במקבילית וכלל המעבר
25, 37	38	GC = $\frac{14}{3}$ ס"מ	הפרש קטעים
35, 38	39	$\frac{AF}{GC}=\frac{29}{14}$	חישוב
		מ.ש.ל. ב (2)	



$\sphericalangle DAB = \alpha$ **(נתון)**

AB **קוטר במעגל (נתון)**

$\sphericalangle ADB = 90°$ **(זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה)**

$\sphericalangle DBA = 90° - \alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔADB **הוא** $180°$**)**

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBA = 90° - \alpha$ **(בטרפז שווה שוקיים הקטעים היוצאים מאותו בסיס שווים,**

ובהתאם זוויות אלו שוות במשולש שווה שוקיים ΔALB**)**

$\sphericalangle DAC = 2\alpha - 90°$ **(הפרש זוויות)**

$\frac{KL}{LM} = \frac{DL}{LB}$ **(משפט תאלס הרחבה 2)**

$\frac{DL}{LB} = \frac{DL}{LA}$ **(הראינו כי** ΔALB **שווה שוקיים)**

<u>ΔALD</u>

$$\sin(2\alpha - 90°) = \frac{DL}{LA}$$

$$\frac{DL}{LA} = -\sin(90° - 2\alpha)$$

$$\frac{DL}{LA} = -\cos 2\alpha$$

ולכן $\boxed{\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha}$ **על פי כלל המעבר.**

תשובה: $\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha$

א. (1) לפונקציה שתי אסימפטוטות אנכיות $x=4$ ו- $x=-1$, נעלה אותן על מערכת הצירים.

לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$, כיוון שהפונקציה רציונאלית, הגרף ישאף לציר ה- x ,

הן לקרן החיובית והן לקרן השלילית.

הפונקציה מוגדרת עבור כל $x \neq 1$ ו- $x \neq 4$, לכן הגרף של הפונקציה יורכב משלושה ענפים.

$f(0)>0$, לכן נסמן נקודה על הקרן החיובית של ציר ה- y .

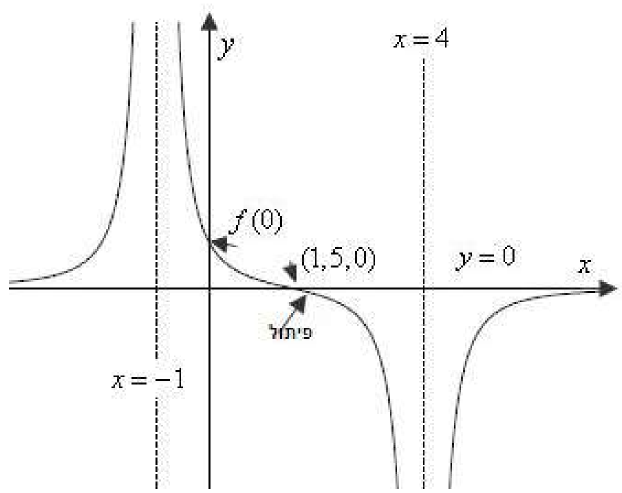
$f(1.5)=0$, לכן נסמן את הנקודה $(1,5,0)$ על ציר ה- x .

$f'(x)<0$ רק עבור $-1<x<4$, ומכיוון שהפונקציה רציונאלית, הרי שבשאר התחומים היא עולה.

$f(x)<0$ עבור $x>4$ לכן בתחום זה הגרף יהיה מתחת לציר ה- x ושואף לאסימפטוטות $x=4$ ו- $y=0$.

$f(x)>0$ עבור $x<-1$ לכן בתחום זה הגרף יהיה מעל לציר ה- x ושואף לאסימפטוטות $x=-1$ ו- $y=0$.

תשובה: סקיצה אפשרית:



(2) בתחום $-1<x<4$ גרף הפונקציה עובר מקעירות כלפי מעלה (עקב השאיפה ל- $x=-1$ בתחום של הירידה)

לקעירות כלפי מטה (עקב השאיפה ל- $x=4$ בתחום של הירידה), כלומר לגרף הנגזרת תהייה נקודת קיצון

מסוג מקסימום, כי הנגזרת תעבור מעלייה לירידה בנקודה זו (ולכן הנגזרת שלה $f''(x)$ מחיובית לשלילית).

בציור מסומנת נקודת פיתול אפשרית.

הערה: לא ניתן לשלול אפשרות של נקודות פיתול נוספות בתחום זה,

אך בכל מקרה תהיינה מספר אי זוגי של נקודות פיתול, ובהתאם נקודת מקסימום אחת יותר מנקודת מינימום

של פונקציית הנגזרת.

תשובה: נקודת מקסימום אחת לפחות, ותתכנה זוגות נוספים של נקודות קיצון.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x)=\frac{3a-3bx}{(x^2-ax-4)^2}$

כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=-1$ **ו-** $x=4$**.**

הרי שהביטוי במכנה הוא $(x^2-3x-4)^2=((x-4)(x+1))^2$ **ולכן** $a=3$**.**

הביטוי במונה מתאפס עבור $x=1.5$ **ולכן** $3\cdot3-3b\cdot1.5=0$ **ובהתאם** $b=2$

תשובה: $f(x)=\frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=4\sin^2 x\cos^2 x$ **בתחום** $0\le x\le\pi$.

הפתרון המוצג כאן מבוסס על מחזוריות והמידע הקיים על פונקציית ה - $\sin x$ **.**

על פי הנוסחה של זווית כפולה $\sin 2x=2\sin x\cos x$ **, נקבל ש-** $f(x)=\sin^2 2x$ **.**

גרף הפונקציה $\sin x$ **מתואר בסקיצה הבאה, בקו אדום, עם נקודות חיתוך עם הצירים וקיצון ידועות.**

גרף הפונקציה $\sin 2x$ **הוא כיווץ של** $\sin x$ **עקב הגדלת המחזוריות, ומתואר בקו צהוב.**

ערכי הפונקציה $\sin 2x$ **עבור** $x=\frac{t}{2}$ **יהיו שווים לערכי הפונקציה** $\sin x$ **עבור** $x=t$ **.**

גרף הפונקציה $f(x)=\sin^2 2x$ **הופך את הגרף של** $\sin 2x$ **לאי-שלילי .**

כאשר ערכי ה- y **של** $\sin^2 2x$ **קטנים בערכם המוחלט מערכי הפונקציה** $\sin 2x$ **,**

למעט הערכים בנקודות הקיצון שבהם ערכם המוחלט נשאר 1.

נסמן גרף זה בכחול.

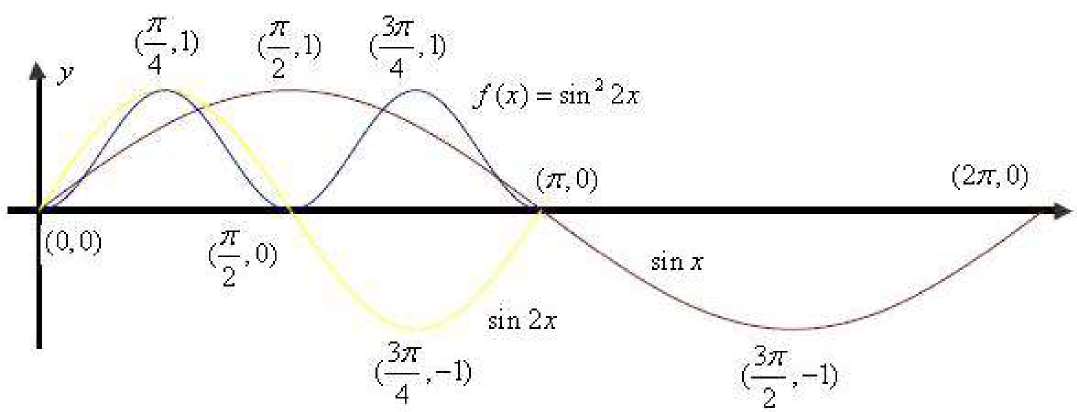
המעבר לפונקציה אי שלילית יוצר נקודת קיצון נוספת $(\frac{\pi}{2},0)$ **מסוג מינימום,**

כי הנקודה הפכה מנקודת חיתוך עם ציר ה- x **לנקודת השקה לציר ה-** x **.**

ומשנה סוג של אחרת $(\pi,0)$ **כי הפכה מנקודת מקסימום קצה לנקודת מינימום קצה.**

נציג את כל ערכי הפונקציות בטבלה מרכזת:

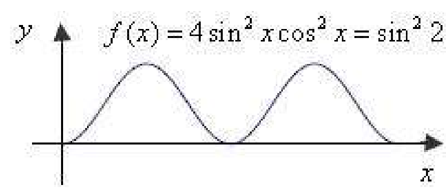
	$\sin x$ **בתחום** $0 \le x \le 2\pi$	$\sin 2x$ **בתחום** $0 \le x \le \pi$	$\sin^2 2x$ **בתחום** $0 \le x \le \pi$
נקודת חיתוך ציר y	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
נקודת חיתוך ציר x	$(2\pi,0)$, $(\pi,0)$, $(0,0)$	$(\pi,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$	$(\pi,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$
נקודות קיצון קצה	$(0,0)$ **מינימום** $(2\pi,0)$ **מקסימום**	$(0,0)$ **מינימום** $(\pi,0)$ **מקסימום**	$(0,0)$ **מינימום** $(\pi,0)$ **מינימום**
נקודות קיצון פנימיות	$(\frac{\pi}{2},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{2},-1)$ **מינימום**	$(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{4},-1)$ **מינימום**	$(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{4},1)$ **מקסימום**



תשובה: $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\pi,0)$**.**

ב. תשובה: $(0,0)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום ,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **מינימום,** $(\frac{3\pi}{4},1)$ **,** $(\pi,0)$ **מינימום.**

ג. הסקיצה המתאימה, כפי שהוסבר בסעיף א:



ד. (1) $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 2x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sin^2 2x$$

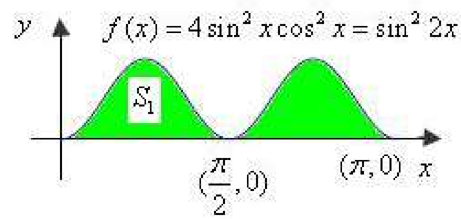
$$g'(x)=\sin^2 2x=f(x)$$

הוכַח.

(2) עקב הסימטריה של $\sin 2x$ **לציר ה-** x **, בתחום** $0\le x\le\pi$ **,**

הרי שגם אחרי המעבר לפונקציה $f(x)=\sin^2 2x$

תהיה פונקציה $f(x)$ **סימטרית משני צידי הישר** $x=\frac{\pi}{2}$ **, ולכן יהיו שני השטחים המסומנים שווים בשטחם.**



$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=$$

$$S_1=g(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$S_1=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

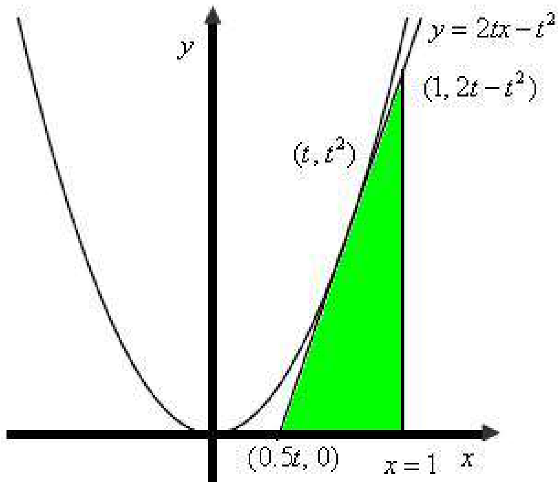
$$S_1=(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\sin(4\cdot\frac{\pi}{2})-(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{8}\sin(4\cdot 0)$$

$$S_1=\frac{\pi}{4}$$

ולכן סכום השטחים המסומנים הוא $\frac{\pi}{2}$

תשובה: גודל השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ **ועל ידי ציר ה-** x **הוא** $\frac{\pi}{2}$ **.**

א. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* **היא** *השטח של המשולש הירוק.*



נסמן ב- t **את נקודת ההשקה ולכן שיעוריה** (t, t^2)

שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה: $y' = 2x \quad \rightarrow m = 2t$

משוואת המשיק: $y - t^2 = 2t(x - t) \quad \rightarrow \boxed{y = 2tx - t^2}$

נקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה- x **היא** $(0.5t, 0)$ **.**

נקודת החיתוך של המשיק עם הישר $x = 1$ **היא** $(1, 2t - t^2)$

השטח המבוקש:

$$S(t) = \frac{1}{2}(1 - 0.5t)(2t - t^2)$$

$$S(t) = \frac{1}{2}(2t - t^2 - t^2 + 0.5t^3)$$

$$\boxed{S(t) = 0.25t^3 - t^2 + t}$$

נמצא נקודת קיצון

$$\boxed{S'(t) = 0.75t^2 - 2t + 1}$$

$$0.75t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{1.5} \quad \rightarrow \boxed{t = \frac{2}{3}} \quad \cancel{t = 2} \leftarrow 0 < t < 1$$

$$\boxed{s''(t) = 1.5t - 2}$$

$$s''(\frac{2}{3}) = 1.5 \cdot \frac{2}{3} - 2 < 0 \quad \rightarrow Max$$

נציב $t = \frac{2}{3}$ **בפונקציית השטח:** $S(\frac{2}{3}) = 0.25(\frac{2}{3})^3 - (\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

תשובה: השטח המקסימלי של המשולש הוא $\frac{8}{27}$ **יחידות שטח.**