א. יש למצוא את יחס המהירויות בין הרוכבים, נסמן אותו ב- p

(היחס בין מהירות האופנוע למהירות אופניים הוא $P:1$**).**

עד הפגישה, כאשר נסעו את אותו הזמן, עבר רוכב האופנוע מרחק הגדול פי p **מהמרחק שעבר רוכב האופניים.**

ולכן לאחר הפגישה עבר מרחק הקטן פי p **מהמרחק שעבר רוכב האופניים,**

בזמן הקטן פי 16 **מזמנו של רוכב האופניים (** $\frac{0.25}{4}=\frac{1}{16}$ **).**

לכן יחס המהירויות הוא $\sqrt{16}=4$ **.** $(P=\frac{S_1/t_1}{S_2/t_2} \rightarrow P=\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{t_2}{t_1} \rightarrow P=\frac{1}{P}\cdot 16 \rightarrow P^2=16)$ **.**

תשובה: היחס בין מהירות רוכב האופנוע למהירות רוכב האופניים הוא 4 **.**

ב. נתון כי המרחק בין A **ל-** B **גדול מ-** 90 **קמ"ש.**

כיוון שיחס המהירויות הוא $4:1$**, הרי שלרוכב האופנוע נותר לעבור** $\frac{1}{5}$ **מהדרך ברבע שעה,**

כלומר יותר מ- $90:5=18$ **ק"מ ברבע שעה ובהתאם מהירותו גדולה מ-** 72 **קמ"ש.**

על פי היחס ביניהם, מהירות רוכב האופניים גדולה מ- 18 **קמ"ש.**

כמו כן, קיים חסם עליון של 120 **קמ"ש למהירות רוכב האופנוע, ובהתאם** 30 **קמ"ש למהירות רוכב האופניים.**

תשובה: מהירות רוכב האופנוע גדולה מ- 72 **קמ"ש וקטנה או שווה ל-** 120 **קמ"ש.**

מהירות רוכב האופניים גדולה מ- 18 **קמ"ש וקטנה או שווה ל-** 30 **קמ"ש.**

א. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3..., a_n$ **.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$ **.**

אגף ימין: $(a_1 \cdot a_1)^2 = a_1^2 \cdot a_1^2$ **אגף שמאל:** $a_1^2 \cdot a_1^2$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$ **.**

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot ... \cdot a_k^2 = (a_1 \cdot a_k)^k$ **.**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **.**

כלומר, $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot ... \cdot a_k^2 \cdot a_{k+1}^2 = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$

נחליף, את הביטוי המסומן, על פי הנחת האינדוקציה, ולאחר מכן נשתמש בעובדה שהסדרה הנדסית:

$$\underline{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot ... \cdot a_k^2} \cdot a_{k+1}^2 = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 \cdot a_k)^k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+1} = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow a_1 \cdot a_k^k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+1} = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow a_1 \cdot (\frac{a_{k+1}}{q})^k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+1} = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow a_1^k \cdot \frac{a_{k+1}^k}{\cancel{q^k}} \cdot a_1 \cancel{q^k} \cdot a_{k+1} = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1} = (a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$ **, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**
אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

<u>פתרון אלטרנטיבי, על פי חוקי סדרה הנדסית וחשבונית</u>

צ"ל $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot ... \cdot a_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

$$\boxed{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot ... \cdot a_n^2} = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n)^2$$

$$= (a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot ... \cdot a_1^{n-1})^2 = (a_1^n \cdot q^{1+2+...+n-1})^2 =$$

$$= (a_1^n \cdot q^{\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}})^2 = a_1^{2n} \cdot q^{(n-1)n} =$$

$$= (a_1^2 \cdot q^{n-1})^n = (a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1})^n = \boxed{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

ב. נתון: $a_1^{\,4}\cdot a_6^{\,4}=1,048,576$.

(1) $a_1\cdot a_6=\pm\sqrt[4]{1,048,576}=\pm 32$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, נקבל:

$$a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot a_3^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_6^{\,2}=(a_1\cdot a_6)^6$$
$$a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot a_3^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_6^{\,2}=(\pm 32)^6=(\pm 2^5)^6$$
$$a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot a_3^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_6^{\,2}=2^{30}$$

תשובה: 2^{30}

(2) $a_1=1$

$$a_1\cdot a_6=\pm 32$$
$$a_1\cdot a_1\cdot q^5=\pm 32$$
$$1\cdot 1\cdot q^5=\pm 32$$
$$q=\pm 2$$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, נקבל:

$$a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot a_3^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_7^{\,2}=(a_1\cdot a_7)^7=(1\cdot a_7)^7=a_7^{\,7}$$
$$a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot a_3^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_6^{\,2}=(a_1\cdot q^6)^7=(1\cdot q^6)^7=((\pm 2)^6)^7=(2^6)^7$$
$$a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot a_3^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_7^{\,2}=2^{42}$$

תשובה: 2^{42}

א. נגדיר את המאורעות:

S - **הנסקרים** A - **בנים** $\overline{A}$ - **בנות**

B - **סובלים מרעש** $\overline{B}$ - **לא סובלים מרעש**

נתונים ומשמעויות

$$\frac{N(A)}{N(S)} = 0.5 \quad \rightarrow P(A) = P(\overline{A}) = 0.5$$

$$N(\overline{A} \cap B) = 3N(A \cap B) \quad \rightarrow P(\overline{A} \cap B) = 3P(A \cap B)$$

$$P(B / A) = 0.05 \quad \rightarrow P(\overline{B} / A) = 0.95$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$0.05 = \frac{P(B \cap A)}{0.5}$$

$$\boxed{P(B \cap A) = 0.025} \quad \rightarrow \boxed{P(\overline{A} \cap B) = 0.075}$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים

	A **בנים**	$\overline{A}$ **בנות**	
B - **סובלים מרעש**	0.025	0.075	0.1
$\overline{B}$ - **לא סובלים מרעש**	0.475	0.425	0.9
	0.5	0.5	1

נמצא את ההסתברות שהנבחר הוא בת, באם נתון כי הנבחר סובל מרעש.

$$P(\overline{A} / B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.075}{0.1} = 0.75$$

תשובה: ההסתברות היא 0.75.

ב. נחשב את ההסתברות (המותנית) שבדיוק אחד מהחמישה סובל מרעש,

אם ידוע כי לכל היותר שניים מחמישה סובלים מרעש.

זו התפלגות בינומית, כאשר $n=5$ **,** $p=0.1$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי, $P_n(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$ **, את הסתברות ל-** 0 **,** 1 **, או** 2 **סובלים מרעש.**

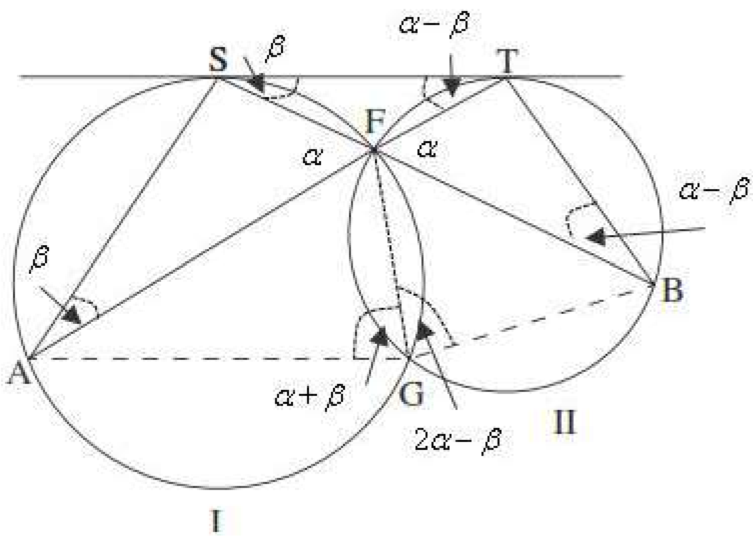
$$\mathrm{P}_5(0)=\binom{5}{0}(0.1)^0(1-0.1)^{5-0}$$
$$\mathrm{P}_5(0)=1\cdot1\cdot0.9^5$$
$$\mathrm{P}_5(0)=0.59049$$

$$\mathrm{P}_5(1)=\binom{5}{1}(0.1)^1(1-0.1)^{5-1}$$
$$\mathrm{P}_5(1)=\frac{5!}{1!(5-1)!}\cdot0.1^1\cdot0.9^4$$
$$\mathrm{P}_5(1)=5\cdot0.1^1\cdot0.9^4$$
$$\mathrm{P}_5(1)=0.32805$$

$$\mathrm{P}_5(2)=\binom{5}{2}(0.1)^2(1-0.1)^{5-2}$$
$$\mathrm{P}_5(2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot0.1^2\cdot0.9^3$$
$$\mathrm{P}_5(2)=10\cdot0.1^2\cdot0.9^3$$
$$\mathrm{P}_5(2)=0.0729$$

$$\mathrm{P}=\frac{0.32805}{0.0729+0.32805+0.59049}=\frac{0.32805}{0.00144}=\frac{45}{136}$$

תשובה: ההסתברות היא $0.331=\frac{45}{136}$ **.**



<u>נתונים</u>

1. ST **משיק למעגל** I **בנקודה** S.

2. ST **משיק למעגל** II **בנקודה** T.

עבור ב (2)

3. A , G **ו-** B **על ישר אחד.**

צ"ל: א. $\frac{ST}{AS}=\frac{TB}{ST}$

ב. (1) $\sphericalangle AGF=\sphericalangle SFA+\sphericalangle SAF$.

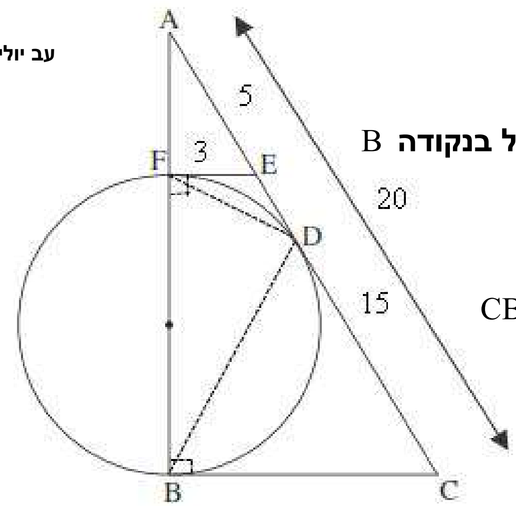
(2) $\sphericalangle SFA=60^\circ$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	4	ST **משיק למעגל** I **בנקודה** S	נתון
4	5	$\sphericalangle SAT=\sphericalangle TSB=\beta$ (ז)	זווית בין משיק למיתר, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני (וסימון עבור ב(2))
2	6	ST **משיק למעגל** II **בנקודה** T	נתון
6	7	$\sphericalangle STA=\sphericalangle TBS$ (ז)	זווית בין משיק למיתר, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני
7 ,5	8	$\Delta TSA\sim\Delta BTS$	משפט דמיון זווית זווית
8	9	$\frac{TS}{BT}=\frac{TA}{BS}=\frac{SA}{TS}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
9	10	$\frac{ST}{AS}=\frac{TB}{ST}$	חישוב
		מ.ש.ל. א	
	11	$\sphericalangle SFA=\alpha$	סימון
11 ,5	12	$\overset{\frown}{ASF}=2(\alpha+\beta)$	זווית היקפית שווה לחצי הקשת הנשענת עליה וסכום קשתות
12	13	$\sphericalangle FGA=\alpha+\beta$	זווית היקפית שווה לחצי הקשת הנשענת עליה
13 ,11 ,5	14	$\sphericalangle AGF=\sphericalangle SFA+\sphericalangle SAF$	חישוב (ניתן גם ללא סימון גדלי הזוויות, אולם גדלים אלו חשובים להמשך התרגיל)
		מ.ש.ל. ב (1)	

הסבר	מס'	טענה	נימוק
5, 11	**15**	$\sphericalangle STA = \alpha - \beta$	**זווית חיצונית ל-** ΔSTF **שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שלא צמודות לה**
7, 15	**16**	$\sphericalangle TBS = \alpha - \beta$	**הצבה**
11	**17**	$\sphericalangle TFB = \sphericalangle SFA = \alpha$	**זוויות קדקודיות שוות זו לזו**
16, 17	**18**	$\overset{\frown}{FTB} = 2(2\alpha - \beta)$	**זווית היקפית שווה לחצי הקשת הנשענת עליה וסכום קשתות**
18	**19**	$\sphericalangle FGB = 2\alpha - \beta$	**זווית היקפית שווה לחצי הקשת הנשענת עליה**
3	**20**	A, G **ו-** B **על ישר אחד**	**נתון**
13, 19, 20	**21**	$2\alpha - \beta + \alpha + \beta = 180°$	**זווית שטוחה שווה ל-** $180°$
21	**22**	$\alpha = 60°$	**חישוב**
11, 22	**23**	$\sphericalangle SFA = 60°$	**הצבה**

מ.ש.ל. ב (2)

5



נתונים

1. CEA **משיק למעגל בנקודה** D **2.** CB **משיק למעגל בנקודה** B

3. FB **קוטר** .4 EF **משיק למעגל בנקודה** F

עבור ב: 4. $EC =$ 15 **ס"מ 5.** $AE =$ 5 **ס"מ .**

צ"ל: א. האם FEDB **בר חסימה ב.** $CB + EF = ED + CD$

ג. EF **ד. זוויות** ΔFDB

הסבר	מס'	טענה	נימוק
3	6	FB **קוטר**	**נתון**
5	7	EF **משיק למעגל בנקודה** F	**נתון**
7 ,6	8	$\sphericalangle BFE = 90°$	**הקוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה**
6	9	$\sphericalangle FDB = 90°$	**זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה**
9	10	$\sphericalangle EDB > 90°$	**השלם גדול מחלקו**
10 ,8	11	FEDB **אינו בר חסימה**	**סכום זוויות נגדיות גדול מ-** $180°$
מ.ש.ל. א			
2	12	CB **משיק למעגל בנקודה** B	**נתון**
1	13	CEA **משיק למעגל בנקודה** D	**נתון**
13 ,7	14	$EF = ED$	**אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הם שווים**
13 ,12	15	$CB = CD$	**אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הם שווים**
15 ,14	16	$CB + EF = ED + CD$	**חיבור קטעים שווים לקטעים שווים**
מ.ש.ל. ב			
4	17	$EC =$ 15 **ס"מ**	**נתון**
5	18	$AE =$ 5 **ס"מ**	**נתון**
18 ,17	19	$AC =$ 20 **ס"מ**	**סכום קטעים**
12	20	$\sphericalangle CBF = 90°$	**הקוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה**
20 ,8	21	$EF \parallel CB$	**זוויות חד צדדיות משלימות ל-** $180°$
21 ,19 ,18	22	$\frac{EF}{CB} = \frac{AE}{AC} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	**משפט תאלס הרחבה 1, הצבה וחישוב**
17 ,16	23	$CB + EF =$ 15 **ס"מ**	**הצבה וחישוב**
23 ,22	23	$EF =$ 3 **ס"מ**	**כללי פרופורציות וחישוב**
מ.ש.ל. ג			

ונעבור לטריגונומטריה לסעיף ד'

מציאת ערך $\sphericalangle AEF$ **ב-** ΔAFE

$$\cos\sphericalangle AEF=\frac{3}{5}$$

$$\sphericalangle AEF=53.13°$$

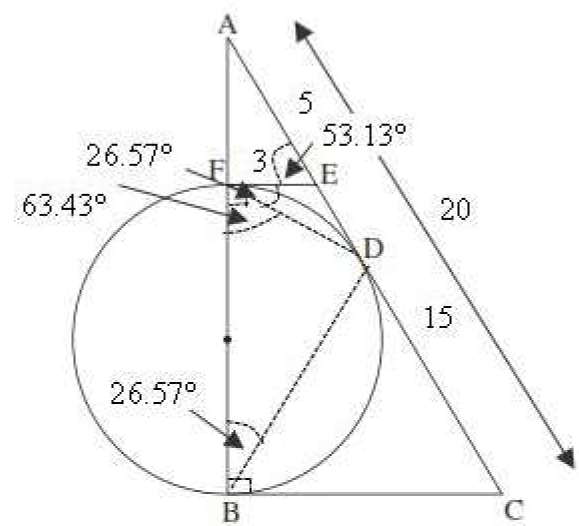
$\sphericalangle EFD=\frac{53.13°}{2}=26.57°$ **(** $\sphericalangle AEF$ **זווית חיצונית למשולש** ΔEFD **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה, כאשר המשולש שווה שוקיים, כפי שהוסבר בשורה 14, עם זוויות בסיס שוות.)**

$\boxed{\sphericalangle DFB=63.43°}$ **(חיסור זוויות)**

$\boxed{\sphericalangle FDB=90°}$ **(הוכח)**

$\boxed{\sphericalangle FBD=26.57°}$ **(סכום זוויות** ΔFDB **הוא** $180°$**, או זווית בין משיק למיתר...)**

תשובה: $\sphericalangle FBD=26.57°$ **,** $\sphericalangle FDB=90°$ **,** $\sphericalangle DFB=63.43°$ **.**



א. במעוין כל הצלעות שוות, וזוויות נגדיות שוות.

$AE = AF = x$ **(נתון וסימון)**

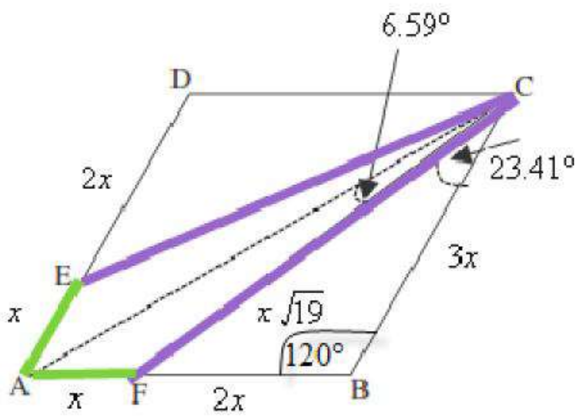
$FB = 2AF = 2x$ **(נתון וחישוב)**

$AB = 3x$ **(סכום קטעים) ולכן כל צלעות המעוין שוות** $3x$

$DE = 2x$ **(הפרש קטעים)**

$\sphericalangle DCB = 60°$ **(נתון)**

$\sphericalangle FBC = 120°$ **(זוויות סמוכות במעוין משלימות ל-** $180°$**)**



$\underline{\Delta FCB}$ **לפי משפט הקוסינוסים** $120°$

$$(CF)^2 = (FB)^2 + (BC)^2 - 2FB \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle FBC$$
$$(CF)^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos 120°$$
$$(CF)^2 = 19x^2$$
$$\boxed{CF = x\sqrt{19}}$$

$\underline{\Delta FCB}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{FB}{\sin\sphericalangle FCB} = \frac{FC}{\sin\sphericalangle FBC} \rightarrow \frac{2x}{\sin\sphericalangle FCB} = \frac{x\sqrt{19}}{\sin 120°}$$
$$\frac{2x\sin 120°}{x\sqrt{19}} = \sin\sphericalangle FCB$$
$$\boxed{\sphericalangle FCB = 23.41°}$$

תשובה: $\sphericalangle FCB = 23.41°$ **.**

ב. נתון כי אורך האלכסון AC **הוא** b**.**

$\sphericalangle ACB = 30°$ **(אלכסוני המעוין חוצים זוויות)**

$\sphericalangle ACF = 6.59°$ **(הפרש זוויות)**

$\sphericalangle CAF = 30°$ **(זוויות נגדיות שוות במעוין ואלכסון חוצה זווית במעוין)**

$\sphericalangle AFC = 143.41°$ **(סכום זוויות** ΔACF **הוא** $180°$ **)**

$\underline{\Delta ACF}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{FC}{\sin\sphericalangle CAF} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle AFC} \rightarrow \frac{x\sqrt{19}}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 143.41°}$$
$$x\sqrt{19} = 0.8388b \rightarrow \boxed{FC = 0.8388b}$$
$$x = 0.1924b \rightarrow \boxed{AF = 0.1924b}$$

$\Delta FCB \cong \Delta ECD$ **(משפט חפיפה צלע זווית צלע) ולכן מרובע** $AECF$ **הוא דלתון.**

נחשב את היקף מרובע $AECF$ **:** $2 \cdot 0.8388b + 2 \cdot 0.1924b = 2.0624b$

תשובה: היקף מרובע $AECF$ **הוא** $2.0624b$ **ס"מ.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^3(3x-\pi)$ **בתחום** $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

$$f(x)=\cos^3(3x-\pi)=\cos^3(\pi-3x)=-\cos^3 3x$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$**, כלומר** $f(0)=-\cos^3(3\cdot 0)=-1\quad\rightarrow\boxed{(0,-1)}$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$**,**

$$0=-\cos^3 3x\quad\rightarrow\cos 3x=0\quad\rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k\quad\rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$$

עבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{6}$**, ועבור** $k=1$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{2}$**.**

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(\frac{\pi}{6},0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$**.**

ב. נמצא תחילה את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור, ולאחר מכן נקודות קיצון פנימיות:

$$\boxed{(0,-1)},\quad f(\frac{2\pi}{3})=-\cos^3(3\cdot\frac{2\pi}{3})=-1\quad\rightarrow\boxed{(\frac{2\pi}{3},-1)}$$

$$\boxed{f'(x)=9\cos^2 3x\sin 3x}$$

$$0=9\cos^2 3x\sin 3x$$

$$\sin 3x=0\qquad\qquad \cos 3x=0\quad\rightarrow(\frac{\pi}{6},0),(\frac{\pi}{2},0)\quad \textit{have been proved}$$

$$3x=\pi k\quad x=\frac{\pi}{3}k$$

$$k=1\quad\rightarrow x=\frac{\pi}{3}\quad\rightarrow f(\frac{\pi}{3})=-\cos^3(3\cdot\frac{\pi}{3})=1\quad\rightarrow\boxed{(\frac{\pi}{3},1)}$$

$$k=0,2\quad\rightarrow x=0,\ x=\frac{2\pi}{3}\text{end points}$$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה,

כאשר $(\frac{\pi}{6},0),(\frac{\pi}{2},0)$ **מתגלות כנקודות פיתול ולא קיצון.**

x	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		0
$f(x)$	-1		0		1		0		-1
$f'(x)$					0				
מסקנה	**Min**	↘	**פיתול**	↘	**Max**	↗	**פיתול**	↗	**Min**

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(\frac{2\pi}{3},-1)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{3},1)$ **, מקסימום.**

ב. (1) נוכיח כי הפונקציה זוגית

$$f(x)=-\cos^3 3x$$
$$f(-x)=-\cos^3(3(-x))=-\cos^3(-3x)=-\cos^3 3x$$
$$f(-x)=f(x)$$

תשובה: הוּכַח.

(2) פונקציה זוגית סימטרית לציר ה- y **.**

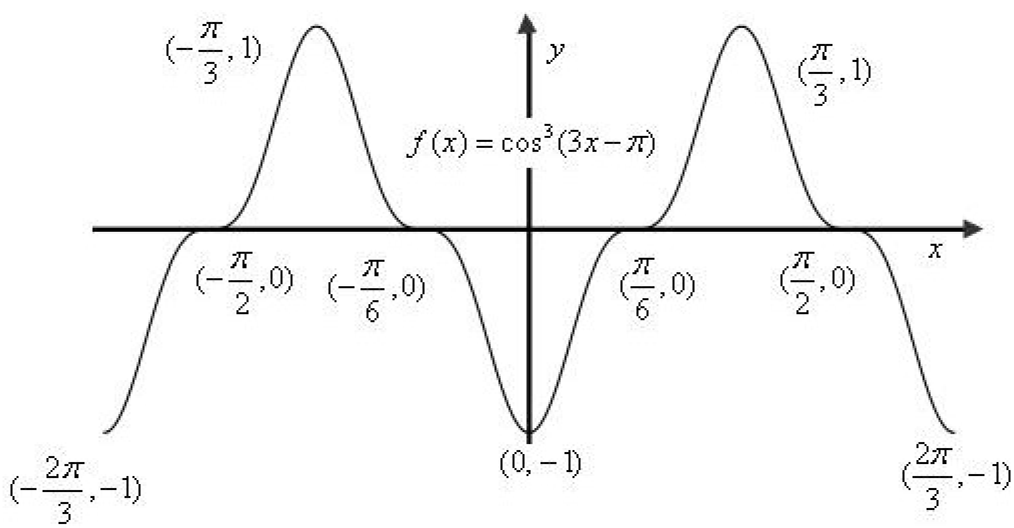
בהתאם:

$(-\frac{\pi}{6},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **נוספות כנקודות חיתוך עם ציר ה-** x **וכנקודות פיתול.**

$(-\frac{2\pi}{3},-1)$ **מינימום ,** $(-\frac{\pi}{3},1)$ **, מקסימום נוספות כנקודות קיצון,**

$(0,-1)$ **נשארת מינימום, אך כנקודת קיצון פנימית.**

הסקיצה המתאימה:



ג. משוואות המשיק בנקודות קיצון פנימיות הן של פונקציות קבועות, כי השיפוע 0 **.**

בנקודת המינימום $(0,-1)$ **, משוואת המשיק היא** $y=-1$ **.**

(בנקודות המינימום של הקצה, הנגזרת אינה מוגדרת ולכן לא קיים משיק).

בנקודות המקסימום $(\frac{\pi}{3},1)$ **ו-** $(-\frac{\pi}{3},1)$ **משוואת המשיק היא** $y=1$ **.**

בנקודות הפיתול $(-\frac{\pi}{2},0),(-\frac{\pi}{6},0),(\frac{\pi}{6},0),(\frac{\pi}{2},0)$ **, שהתגלו, בהן שיפוע המשיק הוא** 0 **,**

משוואת המשיק היא $y=0$ **.**

תשובה: $y=-1$ **,** $y=1$ **,** $y=0$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0 **.**

$x^2-9>0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=-3,3$

תשובה: תחום ההגדרה: $x>3$ **או** $x<-3$.

(2) אין נקודות חיתוך עם ציר y **כי** $x=0$ **אינו בתחום ההגדרה.**

בנקודת החיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל** $x=-1$ **שגם לא בתחום ההגדרה.**

תשובה: אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{1}\ \to\ \boxed{y=1}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{-1}\ \to\ \boxed{y=-1}$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to3^+}\frac{4}{0^+}=+\infty\ \to\ \boxed{x=3}\qquad \lim_{x\to-3^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to-3^-}\frac{-2}{0^+}=-\infty\ \to\ \boxed{x=-3}$$

תשובה: אסימפטוטות אופקיות: $y=1$ **,** $y=-1$ **, אסימפטוטות אנכיות:** $x=3$, $x=-3$

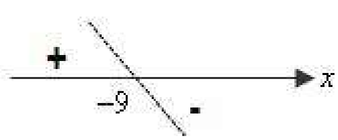
(4) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}-\frac{\cancel{2}x(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-9-x^2-x}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-9-x}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}}$$



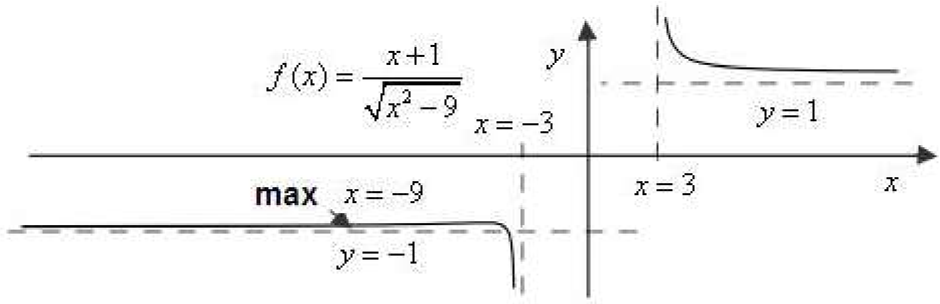
סימן הנגזרת נקבע על ידי הביטוי במונה, שהוא קו ישר יורד, ומקבל ערך 0 **עבור** $x=-9$ **.**

ובהתאם הנגזרת חיובית עבור $x<-9$ **ושלילית עבור** $-9<x<-3$ **או** $x>3$

תשובה: ירידה: $x>3$ **או** $-9<x<-3$ **, עלייה:** $x<-9$ **.**

ב. נשים לב שהפונקציה חיובית עבור $x>3$ ושלילית עבור $x<-3$.

ובהתאם הסקיצה המתאימה.



ג. יש למצוא את סימן האינטגרל המסוים $\int_k^t (f'(x)\,dx$, כאשר $3<k<t$

$$\int_k^t (f'(x)\,dx = f(x)\Big]_k^t = f(t)-f(k)$$

כיוון שהפונקציה יורדת, בתחום $x>3$ ו- $3<k<t$,

הרי ש- $f(t)<f(k)$ ולכן $f(t)-f(k)<0$.

תשובה: סימן האינטגרל המסוים הוא שלילי.

א. הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציית מנה המוגדרת עבור** $x \neq -1$ **.**

על פי הציור פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **יורדת עבור** $x > -1$ **,**

ולכן הנגזרת השנייה $f''(x)$ **שלילית והפונקציה קעורה כלפי מטה** $\cap$**.**

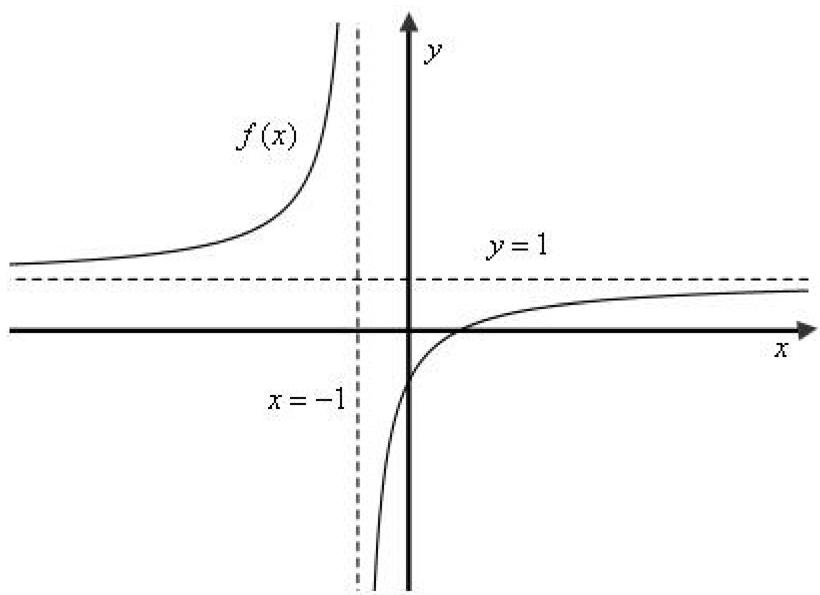
על פי הציור פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **עולה עבור** $x < -1$ **,**

ולכן הנגזרת השנייה $f''(x)$ **חיובית והפונקציה קעורה כלפי מעלה** $\cup$**.**

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ **:** $x < -1$**, קעירות כלפי מטה** $\cap$**:** $x > -1$ **.**

ב. נשים לב שפונקציית הנגזרת חיובית לכל $x \neq -1$**, ולכן הפונקציה עולה עבור** $x > -1$ **או** $x < -1$ **.**

כמו כן נביא לידי ביטוי את האסימפטוטות שניתנו: $x = -1$ **,** $y = 1$ **.**



ג. (1) נתון גם כי $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ **.**

$y = 1$ **אסימפטוטה אופקית, שנקבעת על ידי מנת המקדמים, שכן חזקות הפולינום במונה ובמכנה שוות** (1) **,**

לכן $\dfrac{a}{c} = 1$**, כלומר** $c = a$ **.**

$x = -1$ **מאפס את המכנה, לכן** $c(-1) + d = 0$ **ובהתאם** $d = c = a$ **.**

גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y **בנקודה שבה** $(0, -1)$**, לכן** $f(0) = -1$ **,** $-1 = \dfrac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d}$ **,**

ומכאן ש- $b = -d = -a$ **.**

תשובה: $b = -a$ **,** $c = a$ **,** $d = a$ **.**

(2) על פי סעיף ב (1) $f(x)=\frac{ax-a}{ax+a}$ **, לכן נצמצם ב** $a\neq 0$ **ונקבל** $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$$\int_0^1 (f'(x)\,dx = f(x)\Big]_0^1 = f(1)-f(0)=\frac{1-1}{1+1}-(-1)=1$$

תשובה: גודל השטח הוא 1 **יח"ר.**