א. נסמן ב- x את הזמן הדרוש לפועל I לסיים את העבודה, ו ב- y את מספר השעות של פועל II.

יש למצוא את היחס $\frac{x}{y}$. (הערה - יחידות הזמן אינן מוגדרות בסעיף זה.)

נשים לב שההספק המשותף של שני הפועלים, בזמן שהם עובדים יחדיו הוא $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$,

ופי 1.5 אם יגביר כל אחד מהם את תפוקתו ב- 50%, כלומר $1.5\cdot\frac{x+y}{xy}$

פועל	זמן	חלק עבודה בשעה (הספק)	חלק עבודה כולל (עבודה)
פועל I	x	$\frac{1}{x}$	1
פועל II	y	$\frac{1}{y}$	1
עבודה משותפת	$\frac{xy}{x+y}$	$\frac{x+y}{xy}$	1
ביחד, עם הספק גדול פי 1.5	$\frac{xy}{1.5(x+y)}$	$\frac{1.5(x+y)}{xy}$	1

נפתור את המשוואה המתאימה, נשים לב לכך שהפרש הזמנים המתואר בשאלה

הוא $\frac{2}{15}$ מהזמן הדרוש לפועל I לסיים את העבודה.

$$\frac{xy}{x+y}-\frac{xy}{1.5(x+y)}=\frac{2}{15}x \quad /:x>0$$

$$\frac{y}{x+y}-\frac{y}{1.5(x+y)}=\frac{2}{15} \quad /\cdot 15(x+y)$$

$$15y-10y=2(x+y)$$

$$5y=2x+2y$$

$$3y=2x$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{3}{2}}$$

תשובה: היחס הוא $\frac{3}{2}$ (או $3:2$).

ב. שני הפועלים סיימו את העבודה כולה, בקצב ברגיל, ב- 6 ימים, כאשר על פי סעיף א $x=1.5y$.

$$\frac{xy}{x+y}=6 \ \rightarrow \frac{1.5y\cdot y}{1.5y+y}=6 \ \rightarrow \frac{1.5y^2}{2.5y}=6 \ \rightarrow y=10 \ \rightarrow x=15$$

העבודה כולה כוללת הכנת 300 חלקי חילוף, כאשר פועל I מסיים אותה ב- 15 ימים. $300:15=20$.

תשובה: פועל I מכין 20 חלקי חילוף בקצב העבודה הרגיל שלו.

א. נתונה הסדרה a_n , שסכום n איבריה הראשונים הוא $S_n = n^2 - 5n + \left[2+6+10+...+(4n-2)\right]$

נסמן את מספר איברי הסדרה החשבונית שבסוגריים ב- k (כי הביטוי האלגברי n תפוס...)

לכן: $c_1 = 2, \quad d = 4, \quad c_k = 4n-2$ **, ונשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית ($a_n = a_1 + (n-1)d$).**

$$4n-2 = 2+(k-1)\cdot 4 \quad \to 4n-2 = 2+4k-4$$
$$4n-2 = 4k-2 \quad \to \boxed{k=n}$$

כלומר בתוך הסוגריים יש n מחוברים.

נשתמש בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית ($S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$).

$$S_n = \frac{n(2+4n-2)}{2} = \frac{4n^2}{2} = 2n^2$$

נציב בנוסחה של S_n:

$$S_n = n^2 - 5n + 2n^2$$
$$\boxed{S_n = 3n^2 - 5n}$$

כידוע,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \ge 2)$$
$$a_n = 3n^2 - 5n - (3(n-1)^2 - 5(n-1))$$
$$a_n = 3n^2 - 5n - 3n^2 + 6n - 3 + 5n - 5$$
$$\boxed{a_n = 6n-8}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = S_1 = 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1 = -2 \\ a_1 = 6\cdot 1 - 8 = -2 \end{array}\right\} a_1 = S_1 \quad o.k.$$

תשובה: $a_n = 6n-8$ **.**

ב. נתון כי איברי הסדרה קטנים מ- 102. נמצא את מספר איברי הסדרה

$$6n-8 < 102 \quad \to n < 18\frac{1}{3} \quad \to n = 18, a_{18} = 6\cdot 18 - 8 = 100.$$

האיבר הראשון הוא -2 והאיבר השני הוא 4. נמצא את מספר האיברים החיוביים: $6n-8>0 \quad \to n > \frac{4}{3}$

לכן, ישנם 17 איברים חיוביים (כל איברי הסדרה, למעט הראשון)

לכן הסכום המקסימלי יתקבל כאשר: $S_{18} - a_1 = 3\cdot 18^2 - 5\cdot 18 - (-2) = 884$ **.**

הערה – ניתן גם: זו סדרה חשבונית, עם הפרש 6, שכן

$$a_{n+1} - a_n = 6(n+1) - 8 - (6n-8) = 6n+6-8-6n+8 = 6$$

הסכום המקסימלי יתקבל מחיבור 17 האיברים החל מהאיבר השני : $S_{17} = \frac{17\cdot(4+100)}{2} = 884$ **.**

תשובה: הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל, עבור סכום מסוים של איברים אלה, הוא 884.

א. נסמן ב- p את ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי $0 \le p \le 1$.

לכן p היא גם ההסתברות ששופט ב' יצביע בעד יוסי.

ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5 .

<u>במקרה ורק שופט א' ישפוט בתחרות</u> – ההסתברות שיוסי יעבור שלב היא p .

<u>במקרה וישפטו בתחרות שלושת השופטים</u>, יוסי יעבור שלב אם יצביעו עבורו שני שופטים או כל השלושה.

נחשב הסתברות זו,

כאשר שלושת המחוברים הראשונים מראים אפשרות ששנים בעד ואחד נגד, והמחובר הרביעי – כולם בעד:

$$\text{P(Yossi}\quad\text{passes)} = p\cdot p\cdot 0.5 + p\cdot(1-p)\cdot 0.5 + (1-p)\cdot p\cdot 0.5 + p\cdot p\cdot 0.5$$

$$\text{P(Yossi}\quad\text{passes)} = 0.5p^2 + 0.5p - 0.5p^2 + 0.5p - 0.5p^2 + 0.5p^2$$

$$\text{P(Yossi}\quad\text{passes)} = p$$

מסקנה: קבלנו ששתי ההסתברויות שוות.

תשובה: ההסתברויות שוות.

ב. הוחלט ששלושת השופטים ישפטו בתחרות.

ידוע שיוסי עבר לשלב נוסף – וההסתברות ששופט א' הצביע בעדו גדולה מ- 0.8.

$$p(\textit{judge}\ \text{A}\ \textit{o.k.}/\ \text{Yossi passed}) = \frac{P(\textit{judge}\ \text{A}\ \textit{o.k.} \cap \text{Yossi passed})}{P(\text{Yossi passed})}$$

$$\frac{p\cdot p\cdot 0.5 + p\cdot(1-p)\cdot 0.5 + p\cdot p\cdot 0.5}{p} > 0.8 \quad /:0 < p \le 1$$

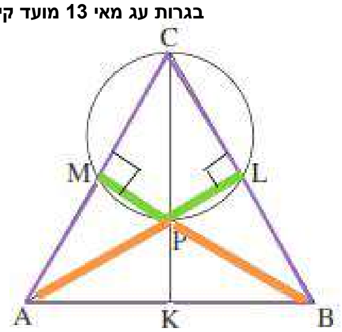
$$0.5p + 0.5 - 0.5p + 0.5p > 0.8$$

$$0.5p > 0.3$$

$$p > 0.6$$

$$\boxed{0.6 < p \le 1}$$

תשובה: תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי, p , הוא $0.6 < p \le 1$.



ניעזר בציור של המשולש הנתון, לשני הסעיפים.

נתונים

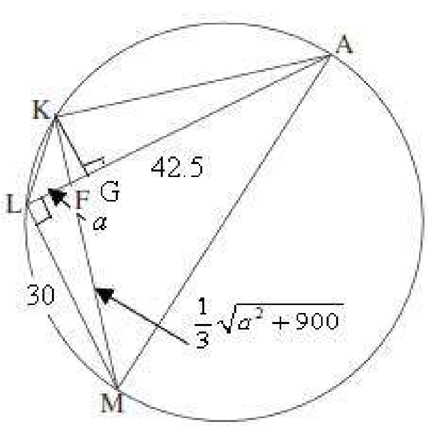
1. BM **תיכון** $(AM = CM)$ **2.** AL **תיכון** $(CL = BL)$ **3.** $AL = BM$

עבור ב

4. $AK = BK$ **5.** $AL = BM$

צ"ל: א. ΔABC **שווה שוקיים. ב(1)** $BM \perp AC$ **(2)** $AK = AM$

הסבר		טענה	נימוק
1	6	BM תיכון $(AM = CM)$	נתון
2	7	AL תיכון $(CL = BL)$	נתון
6, 7	8	$BP = \frac{2}{3}BM$	תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ מהקדקוד
6, 7	9	$AP = \frac{2}{3}AL$	תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ מהקדקוד
3	10	$AL = BM$ (צ)	נתון
8, 9, 10	11	$BP = AP$	כלל מעבר
10, 11	12	$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA$ (ז)	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ב- ΔPAB
	13	$AB = AB$ (צ)	צלע משותפת
10, 12, 13	14	$\Delta MAB \cong \Delta LBA$	משפט חפיפה צלע זווית צלע
14	15	$\sphericalangle LBA = \sphericalangle MAB$	זוויות מתאימות במשולשים חופפים
15	16	ΔABC שווה שוקיים $(CA = CB)$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ב- ΔABC
מ.ש.ל. א			
כל הנתונים שניתנו בסעיף א תקפים גם לסעיף ב, כלומר ΔABC שווה שוקיים $(CA = CB)$			
6, 7, 16	17	$CM = CL$	חצאי צלעות שוות – שווים גם
10, 11	18	$MP = LP$	כלל החיסור
17, 18	19	$CMPL$ דלתון	שני משולשים שווי שוקיים עם בסיס משותף
19	20	$\sphericalangle CLP = \sphericalangle CMP$	זוויות בסיס שוות בדלתון
	21	$\sphericalangle CLP + \sphericalangle CMP = 180^\circ$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל
20, 21	22	$\sphericalangle CMP = 90^\circ$	חישוב
22	23	$BM \perp AC$	יש ביניהם זווית ישרה
מ.ש.ל. ב(1)			
6, 23	24	$CA = BA$	אם הגובה מתלכד עם התיכון אז המשולש ש"ש
4	25	$AK = BK$	נתון
6, 24, 25	26	$AK = AM$	חצאי צלעות שוות – שווים גם
מ.ש.ל. ב (2)			



<u>נתונים</u>

1. AM **קוטר** **2.** $ML = 30$ **ס"מ** **3.** $FL = a$ **ס"מ** **4.** $\frac{S_{\Delta ALK}}{S_{\Delta ALM}} = \frac{1}{3}$

עבור ד. 5. $AF = 42.5$ **ס"מ** **6.** $ML > a$

צ"ל: א. אורך הגובה לצלע LA **ב-** ΔALK **. ב.** KF

ג. $\Delta AFM \sim \Delta KFL$ **ד.** a

הסבר		טענה	נימוק
1	7	AK קוטר	נתון
7	8	$\sphericalangle ALM = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
2	9	$ML = 30$ ס"מ	נתון
	10	$KG \perp AL$	בניית עזר
4	11	$\frac{S_{\Delta ALK}}{S_{\Delta ALM}} = \frac{1}{3}$	נתון
8, 10, 11	12	$\frac{AL \cdot KG \cdot 0.5}{AL \cdot ML \cdot 0.5} = \frac{1}{3}$	נוסחת שטח משולש
9, 12	13	$\frac{KG}{30} = \frac{1}{3}$	הצבה
13	14	$KG = 10$ ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. א	
3	15	$FL = a$ ס"מ	נתון
8, 9, 15	16	$FM = \sqrt{a^2+900}$	משפט פיתגורס ΔFLM
8, 10	17	$KG \parallel LM$	שני ישרים המאונכים לישר שלישי - מקבילים
17	18	$\frac{KG}{LM} = \frac{KF}{FM}$	משפט תאלס הרחבה 2
9, 14, 18	19	$\frac{10}{30} = \frac{KF}{\sqrt{a^2+900}}$	הצבה
19	20	$KF = \frac{\sqrt{a^2+900}}{3}$	חישוב

הסבר		טענה	נימוק
מ.ש.ל. ב			
	21	$\sphericalangle AFM = \sphericalangle KFL$	**זוויות קדקודיות שוות זו לזו**
	22	$\sphericalangle FAM = \sphericalangle LKM$	**זוויות היקפיות שוות על אותה קשת** $(\overset{\frown}{LM})$
22 ,21	23	$\Delta AFM \sim \Delta KFL$	**משפט דמיון זווית זווית**
מ.ש.ל. ג			
23	24	$\frac{AF}{KF} = \frac{AM}{KL} = \frac{FM}{FL}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
5	25	$AF =$ **ס"מ** 42.5	**נתון**
24, 25, 15, 20	26	$\frac{42.5}{\frac{1}{3}\sqrt{a^2+900}} = \frac{\sqrt{a^2+900}}{a}$ $127.5a = a^2 + 900$ $a^2 - 127.5a + 900 = 0$ $a_{1,2} = \frac{127.5 \pm 112.5}{2}$ $a = 120$ $a = 7.5$	**הצבה וחישוב**
6	27	$ML > a$	**נתון**
26, 27, 9	28	$a = 7.5$	
מ.ש.ל. ד			

א. O **מרכז מעגל חסום – מפגש חוצי זוויות**

יש למצוא את היחס $\frac{AE}{CF}$.

<u>תכנון</u>: נסמן $CF = x$. **נמצא את** AC **ב-** ΔCAF **ולאחר מכן את** AE **ב-** ΔCAE.

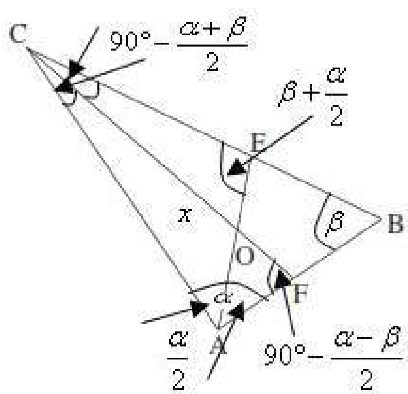
$\sphericalangle BAC = \alpha$ **(נתון) ובהתאם**

$\sphericalangle ABC = \beta$ **(נתון)**

$\sphericalangle BCA = 180° - (\alpha + \beta)$ **(סכום זוויות ב-** ΔABC **הוא** $180°$**), ובהתאם** $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = 90° - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

$\sphericalangle CEA = \beta + \frac{\alpha}{2}$ **(זווית חיצונית ל-** ΔAEB **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה)**

$\sphericalangle CFA = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2}$ **(סכום זוויות ב-** ΔCAF **הוא** $180°$**)**



נמצא את AC **ב-** ΔCAF **באמצעות משפט הסינוסים**

$$\frac{AC}{\sin(90° - \frac{\alpha - \beta}{2})} = \frac{CF}{\sin\alpha}$$

$$\boxed{AC = \frac{x\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})}{\sin\alpha}}$$

נמצא את AE **ב-** ΔCAE **באמצעות משפט הסינוסים**

$$\frac{AE}{\sin(180° - (\alpha + \beta))} = \frac{AC}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}$$

$$\boxed{AE = \frac{x\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\,\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}}$$

וביחס המבוקש x **יצטמצם.**

תשובה: $\frac{AE}{CF} = \frac{\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\,\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}$

ב. נתון גם $\frac{AE}{CF}=\frac{1}{2}$ **,** $\beta=60^\circ$ **.**

יש להראות כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB **שווה ל-** $\frac{1}{2}BC$**,**

כלומר שהצלע BC **היא הקוטר, ולכן יש להראות ש-** $\alpha=90^\circ$**.**

$$\frac{1}{2}=\frac{\cos(\frac{\alpha-60^\circ}{2})\sin(\alpha+60^\circ)}{\sin\alpha\sin(60^\circ+\frac{\alpha}{2})}$$

לפנינו ארבעה גורמים במנה ויש להימנע ככל האפשר משימוש בנוסחאות של $\sin(\alpha+\beta),\cos(\alpha+\beta)$ **או מנוסחאות המעבר של** $\sin\alpha\sin\beta$ **ו-** $\sin\alpha\cos\beta$**,**

לכן יש צורך למצוא צמצום אפשרי.

$$\sin(60^\circ+\frac{\alpha}{2})=\cos(90^\circ-(60^\circ+\frac{\alpha}{2}))=\cos(30^\circ-\frac{\alpha}{2})=\cos(\frac{\alpha}{2}-30^\circ)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^\circ)}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha=2\sin(\alpha+60^\circ)$$

$$\sin\alpha=2(\sin\alpha\cos60^\circ+\cos\alpha\sin60^\circ)$$

$$\sin\alpha=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=0$$

$$\boxed{\alpha=90^\circ}$$

ולכן, כפי שהוסבר בתחילת הסעיף, רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB **שווה ל-** $\frac{1}{2}BC$**.**

תשובה: הוּכַח.

א. נתונה הפונקציה: $g(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$ **בתחום** $0\le x\le\frac{7}{3}\pi$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $\boxed{(0,\frac{\sqrt{3}}{2})} \leftarrow \quad g(0)=\sin(\frac{2\pi}{3}-0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **,**

$$0=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)\quad\rightarrow\frac{2\pi}{3}-x=\pi k\quad\rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$$

עבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{2\pi}{3}$ **, ועבור** $k=1$ **נקבל** $x=\frac{5\pi}{3}$ **.**

תשובה: $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ **,** $(\frac{2\pi}{3},0)$ **,** $(\frac{5\pi}{3},0)$ **.**

ב. נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ **עם גרף הפונקציה** $f(x)=\sin x$ **:**

$$\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin x$$

$$\frac{2\pi}{3}-x=x+2\pi k \qquad \frac{2\pi}{3}-x=\pi-x+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi k \qquad \varnothing$$

עבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{3}$ **, ובהתאם** $\boxed{(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})} \leftarrow \quad y=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **.**

עבור $k=1$ **נקבל** $x=\frac{4\pi}{3}$ **, ובהתאם** $\boxed{(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})} \leftarrow \quad y=\sin(\frac{4\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **.**

עבור $k=2$ **נקבל** $x=\frac{7\pi}{3}$ **, ובהתאם** $\boxed{(\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})} \leftarrow \quad y=\sin(\frac{7\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **.**

תשובה: $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ **,** $(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ **,** $(\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ **.**

ג. (1) הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *אורך הקטע* AB

(A על הגרף של $g(x)$ ו- B על הגרף של $f(x)$).

על-מנת לא להסתבך עם ציור (די קשה בתרגיל זה),

נבין כי אורך הקטע AB, המקביל לציר ה- y, הוא $|y_A - y_B|$,

ולמעשה נבנה פונקציה חדשה $l(x) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x) - \sin x$ **,**

ואם ערכיה יהיו שליליים, הרי זה נובע מכך שעבור אותו ערך x מתקבל ש- $y_B > y_A$.

ערכי הפונקציה בקצוות: $l(0) = \sin(\frac{2\pi}{3} - 0) - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **,** $l(\frac{7\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{3}) - \sin\frac{7\pi}{3} = 0$

וכמובן גם $l(\frac{\pi}{3}) = l(\frac{4\pi}{3}) = l(\frac{7\pi}{3}) = 0$ **כי אלו שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הפונקציות.**

נמצא את נקודות הקיצון המוחלטות.

$$l'(x) = -\cos(\frac{2\pi}{3} - x) - \cos x$$

$$0 = -\cos(\frac{2\pi}{3} - x) - \cos x$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3} - x) = -\cos x$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3} - x) = \cos(\pi - x)$$

$$\frac{2\pi}{3} - x = \pi - x + 2\pi k \qquad \frac{2\pi}{3} - x = x - \pi + 2\pi k$$

$$\varnothing \qquad x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

עבור $k = 0$ נקבל $x = \frac{5\pi}{6}$, ובהתאם $l(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}) - \sin\frac{5\pi}{6} = -1$**.**

עבור $k = 1$ נקבל $x = \frac{11\pi}{6}$, ובהתאם $l(\frac{11\pi}{6}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}) - \sin\frac{11\pi}{6} = 1$**.**

כיוון ש- $-1 < 0, \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$**, הרי שערכי הקיצון המוחלט הם 1 ו- -1 (כאשר, כאמור, $y_B > y_A$ עבור -1)**

בהתאם האורך המקסימלי הוא 1 והוא מתקבל בשתי נקודות, עבור $x = \frac{5\pi}{6}$ ועבור $x = \frac{11\pi}{6}$,

בראשונה: $y_A > y_B$, כלומר הגרף של $g(x)$ מעל לגרף של $f(x)$ ($\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} < \frac{4\pi}{3}$).

בשנייה: $y_A < y_B$, כלומר הגרף של $g(x)$ מתחת לגרף של $f(x)$ ($\frac{4}{3} < \frac{11\pi}{6} < \frac{7\pi}{3}$).

תשובה: האורך המקסימלי של הקטע AB הוא 1.

(2) שני קטעים, שבהם $x = \frac{5\pi}{6}$ או $x = \frac{11\pi}{6}$.

א. נתונות שתי פונקציות $g(x)=-x^2+c$, $f(x)=x^2+4x+b$ **(** $b,c>0$ **).**

בנקודת ההשקה P **, בה עובר המשיק המשותף, שווים הן ערכי הפונקציות והן ערכי הנגזרות.**

$$f'(x)=g'(x)$$
$$-2x+4=-2x \quad \to 4x=-4 \quad \to x=-1$$
$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=(-1)^2+4(-1)+b=b-3 \\ g(-1)&=-(-1)^2+c=c-1 \end{aligned}\right\} c-1=b-3 \quad \to c=b-2$$
$$\boxed{\mathrm{P}(-1,b-3)}$$

תשובה: $\mathrm{P}(-1,b-3)$ **(ומעתה והלאה** $g(x)=-x^2+b-2$ **)**

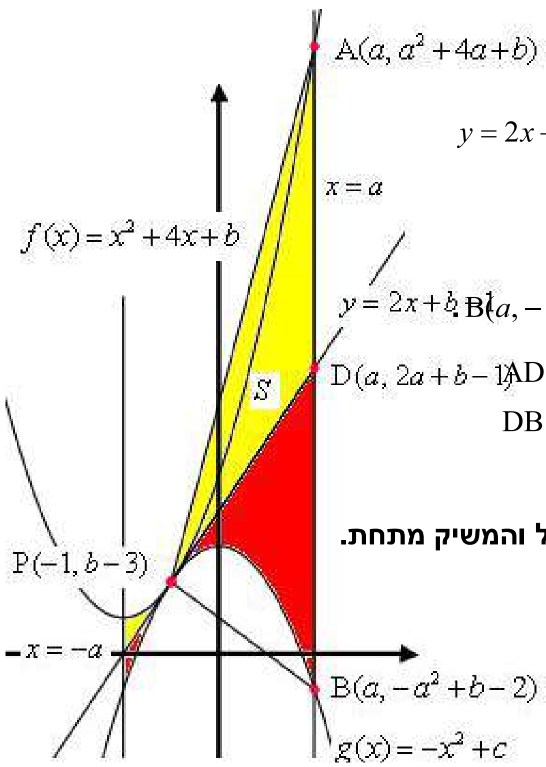
ב. כיוון שנתון $b>4$ **, הרי ששיעור ה-** y **של** P **חיובי**

וכן שלפרבולה $f(x)=x^2+4x+b$ **אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **כי** $\Delta=16-4b^2<0$ **.**

לפרבולה $g(x)=-x^2+c$ **יש מקסימום ושתי נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **, כי** $c=b-4>0$

בנקודת ההשקה P **, בה עובר המשיק המשותף, שווים הן ערכי הפונקציות והן ערכי הנגזרות.**

תשובה :משמאל הסרטוט המתאים כולל סימונים עבור הסעיפים הבאים.



ג. נמצא את משוואת המשיק בנקודה $\mathrm{P}(-1,b-3)$

שיפוע המשיק $g'(-1)=-2\cdot(-1)=2$

משוואת המשיק $y=2x+b-1$ $\quad \to y-(b-3)=2(x+1)$ $\quad y=2x+b-1$

נעביר ישר $x=a$ **(בציור עבור** $a>0$ **, אך אין לכך משמעות)**

שיעורי הנקודה $\mathrm{D}(a,2a+b-1)$

שיעורי הנקודה $\mathrm{A}(a,a^2+4a+b)$ **, ושיעורי הנקודה** $\mathrm{B}(a,-a^2+b-2)$ **.**

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{AD}&=y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{D}}=a^2+4a+b-(2a+b-1)=a^2+2a+1 \\ \mathrm{DB}&=y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{B}}=2a+b-1-(-a^2+b-2)=a^2+2a+1 \end{aligned}\right\} \mathrm{AD}=\mathrm{DB}$$

תשובה: PD **תיכון במשולש** PAB **, כי** $\mathrm{AD}=\mathrm{DB}$ **.**

ד. כל השטח S **(צבוע כולו בצהוב) הוא בין הפונקציות** $f(x)$ **מעל והמשיק מתחת.**

הפרש הפונקציות הוא $x^2+4x+b-(2x+b-1)=x^2+2x+1$

ולכן $S=\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$

השטח המבוקש הוא השטח הצהוב והאדום ביחד.

הפרש הפונקציות: $x^2+4x+b-(-x^2+b-2)=2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)$

ולכן $S_{new}=\int_{-a}^{a}2(x^2+2x+1)\,dx=2\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx=2S$

תשובה: גודל השטח הוא $2S$ **.**

א. נתונה הפונקציה הזוגית $f(x)=\sqrt{8-ax+bx^2}+c$ **,** $c>0$ **.**

כיוון שהפונקציה זוגית, הרי $f(-x)=f(x)$ **ולכן הביטוי שבשורש שווה עבור** $x,-x$ **ולכן** $\boxed{a=0}$ **.**

נציב $x=2$ **בביטוי שבשורש ונשווה ל-** 0 **, לאור תחום ההגדרה שהוא** $-2\le x\le 2$ **.**

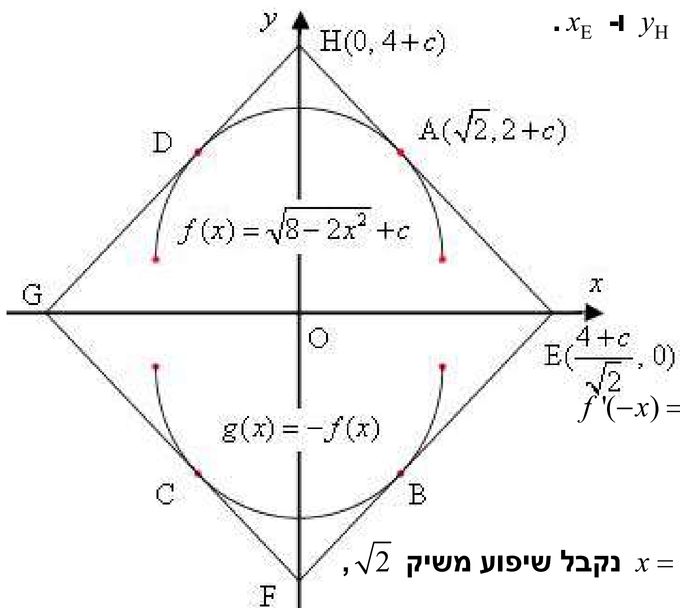
$$8+b\cdot 2^2=0 \quad \rightarrow \boxed{b=-2}$$

תשובה: $a=0$ **,** $b=-2$ **. (הערה – ניתן גם להציב במקביל** $x=-2$ **ולקבל מערכת של שתי משוואות).**

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{8-2x^2}+c$ **.** $c>0$ **ולכן הפונקציה מעל ציר ה-** x **.**

נקודת ההשקה $f(\sqrt{2})=\sqrt{8-2(\sqrt{2})^2}+c=2+c \quad \rightarrow (\sqrt{2},2+c)$

נמצא את שיפוע המשיק, בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$ **, ואת** y_{H} **ו-** x_{E} **.**



$$f'(x)=\frac{-4x}{2\sqrt{8-2x^2}} \quad \rightarrow f'(\sqrt{2})=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

$$m_{\mathrm{AH}}=-\sqrt{2} \quad \rightarrow \frac{2+c-y_{\mathrm{H}}}{\sqrt{2}-0}=-\sqrt{2} \quad \rightarrow y_{\mathrm{H}}=4+c$$

$$m_{\mathrm{AE}}=-\sqrt{2} \quad \rightarrow \frac{2+c-0}{\sqrt{2}-x_{\mathrm{E}}}=-\sqrt{2} \quad \rightarrow x_{\mathrm{E}}=\frac{4+c}{\sqrt{2}}$$

ניתן לראות $f'(-x)=\dfrac{-4(-x)}{2\sqrt{8-2(-x)^2}}=-\dfrac{-4x}{2\sqrt{8-2x^2}}=-f'(-x)$

כלומר $f'(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית.**

עקב זוגיות $f(x)$ **ואי הזוגיות של** $f'(x)$ **- עבור** $x=-\sqrt{2}$ **נקבל שיפוע משיק** $\sqrt{2}$ **,**

והמשיק יחתוך את ציר ה- x **ב-** $x_{\mathrm{G}}=-x_{\mathrm{E}}$ **, ואת ציר ה-** y **בנקודה שבה** $y_{\mathrm{H}}=4+c$ **.**

שטח $\Delta\mathrm{EGH}$ **שווה ל-** $\dfrac{49\sqrt{2}}{2}$ **, ולכן שטח** $\Delta\mathrm{EOH}$ **שווה ל-** $\dfrac{49\sqrt{2}}{4}$ **.**

הצירים מאונכים זה לזה, ולכן:

$$\frac{49\sqrt{2}}{4}=\frac{(4+c)(4+c)}{2\sqrt{2}}$$

$$(4+c)^2=49$$

$$\boxed{c=3} \quad \leftarrow c>0$$

תשובה: $c=3$

ג. $g(x)=-f(x)$ **, ולכן** $g'(x)=-f'(x)$ **, ונקבל שהמשיקים החדשים יקבילו זה לזה,**

כי $g'(\sqrt{2})=-f'(\sqrt{2})=\sqrt{2}, \quad g'(-\sqrt{2})=-f'(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

כמו כן, עקב הסימטריה שני המשיקים ייפגשו באותן נקודת חיתוך עם ציר ה- x **ועל ציר ה-** y **ב-** $-y_{\mathrm{H}}$ **.**

ולכן המרובע הוא מקבילית. כיוון שהאלכסונים גם מאונכים זה לזה, המרובע הוא מעוין.

תשובה: המרובע הוא מעוין.