א. נסמן ב- x את מספר השעות שעברו מרגע יציאת המשאית לדרך ועד ליציאת המכונית.

וב- s את המרחק בין עיר A לעיר B (ק"מ).

נביע בעזרת משתנים אלו את מהירויות כלי הרכב,

ולאחר מכן נבנה משוואה המתבססת על שוויון הדרכים עד לפגישה בין כלי הרכב.

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מ- A ל- B משאית	6	$\frac{S}{6}$	S
מ- A ל- B מכונית	$6-x-2=4-x$	$\frac{S}{4-x}$	S
מ- A עד לפגישה משאית	$1+x$	$\frac{S}{6}$	$(1+x)\cdot\frac{S}{x}$
מ- A עד לפגישה מכונית	1	$\frac{S}{4-x}$	$\frac{S}{4-x}$

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $(1+x)\cdot\frac{S}{6}=\frac{S}{4-x}$.

נפתור את המשוואה:

$$(1+x)\cdot\frac{S}{6}=\frac{S}{4-x} \quad /:S>0$$

$$\frac{(1+x)}{6}=\frac{1}{4-x} \quad /\cdot 6(4-x)$$

$$(1+x)(4-x)=6$$

$$4-x+4x-x^2=6$$

$$0=x^2-3x+2$$

$$0=(x-1)(x-2)$$

$$\boxed{x=1} \quad \boxed{x=2}$$

תשובה: המכונית יצאה לדרך שעה, או שעתיים, מרגע היציאה של המשאית.

א. בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.

$a_1, ... a_n, a_{n+1}, ... a_{2n}, a_{2n+1}, ... a_{3n}$

סכום n האיברים האחרונים (הקבוצה הימנית) גדול פי 2

מסכום n האיברים הקודמים להם (הקבוצה האמצעית).

	n האיברים האחרונים	n האיברים הקודמים להם
A_1	$a_{2n+1} = a_1 + d(2n+1-1) = a_1 + 2dn$	$a_{n+1} = a_1 + d(n+1-1) = a_1 + dn$
D	d	d
N	n	n

נפתח את המשוואה $S_{last\ n} = 2S_{middle\ n}$ ונראה, לאחר מכן, כי $S_{first\ n} = 0$.

$$\frac{n\left[2(a_1+2dn)+d(n-1)\right]}{2} = 2\frac{n\left[2(a_1+dn)+d(n-1)\right]}{2} \quad / :(\frac{n}{2}>0)$$

$$\left[2(a_1+2dn)+d(n-1)\right] = 2\left[2(a_1+dn)+d(n-1)\right]$$

$$2a_1 + 4dn + dn - d = 4a_1 + 4dn + 2dn - 2d$$

$$0 = 2a_1 + dn - d$$

$$\boxed{0 = 2a_1 + d(n-1)}$$

$$S_{first\ n} = \frac{n\left[2a_1 + d(n-1)\right]}{2}$$

$$S_{first\ n} = \frac{n\left[0\right]}{2}$$

$$\boxed{S_{first\ n} = 0}$$

תשובה: הוכח.

ב. נתון כי סכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.

$$a_5 + a_7 = 0$$

$$a_1 + 4d + a_1 + 6d = 0$$

$$2a_1 + 10d = 0$$

$$\boxed{a_1 = -5d}$$

נציב $(-5d)$ במקום a_1 במשוואה שקיבלנו בסעיף הקודם $0 = 2a_1 + d(n-1)$ ונמצא את n.

נשים לב שכיוון וסכום כל איברי הסדרה הוא 726, בעוד שסכום שניים מהם הוא 0,

הרי לא יתכן שהפרש הסדרה הוא 0.

$$0 = 2(-5d) + d(n-1) \quad / : d \neq 0$$

$$0 = -10 + n - 1$$

$$n = 11$$

ומכאן שמספר איברי הסדרה הוא $3n = 33$.

$$S_{33} = 726$$

$$726 = \frac{33\left[2a_1 + d(33-1)\right]}{2} \quad / : \frac{33}{2}$$

$$44 = 2(-5d) + 32d$$

$$44 = 22d \quad / : 22$$

$$\boxed{d = 2}$$

תשובה: הפרש הסדרה הוא 2.

א. אבא ודני משחקים שני סיבובים של זריקות לסל.

ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1**, שאבא ינצח היא** 0.2 **וההסתברות לתיקו היא** 0.7 **.**

כיוון שהסיבובים אינם תלויים זה בזה, הרי שההסתברויות נשארות זהות גם לסיבוב השני.

ניצחון מקנה נקודה אחת למנצח ותיקו חצי נקודה לכל אחד.

אבא יצבור יותר מנקודה אחת, אם ינצח בשני הסיבובים, או שינצח בסיבוב אחד וישיג תיקו בסיבוב האחר.

$$P(Papa\ will\ score\ more\ then\ 1\ point) = 0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.32$$

תשובה: ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים <u>יותר</u> מנקודה אחת היא 0.32 **.**

ב. דני יצבור לפחות נקודה אחת, אם אבא לא יצבור יותר מנקודה אחת:

כיוון שיש שתי נקודות לחלוקה בין שני המתמודדים.

$$P(Dani\ will\ score\ at\ least\ 1\ point) = 1 - 0.32 = 0.68$$

תשובה: ההסתברות דני יצבור בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת היא 0.68 **.**

ג. ידוע שדני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת,

ויש למצוא את ההסתברות שאחד מהסיבובים הסתיים בתיקו והשני בניצחונו של דני

$$p(Dani\ won\ one\ round\ and\ tied\ the\ other\ one\ /\ Dani\ scored\ at\ least\ 1\ point) =$$

$$= \frac{P(Dani\ won\ one\ round\ and\ tied\ the\ other\ one \cap Dani\ scored\ at\ least\ 1\ point)}{P(Dani\ scored\ at\ least\ 1\ point)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1}{0.68} = \frac{0.14}{0.68} = \frac{7}{34}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{7}{34}$ **.**

ד. יש למצוא את ההסתברות ש<u>בדיוק</u> <u>בשני</u> משחקים מתוך 4 **משחקים דני יצבור <u>לפחות</u> נקודה אחת.**

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n = 4$, $p = 0.68$ **(על פי סעיף ב),** $k = 2$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברות המתאימה:

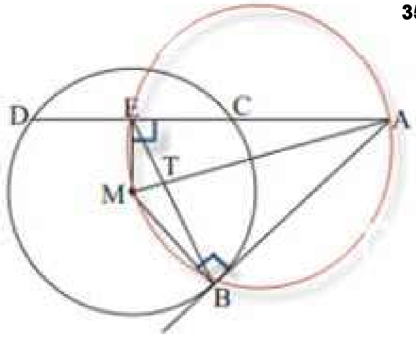
$$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot (0.68)^2 \cdot (1 - 0.68)^{4-2}$$

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0.68^2 \cdot 0.32^2$$

$$P_4(2) = 6 \cdot 0.68^2 \cdot 0.32^2$$

$$P_4(2) = 0.2841$$

תשובה: ההסתברות היא 0.2841 **.**



נתונים

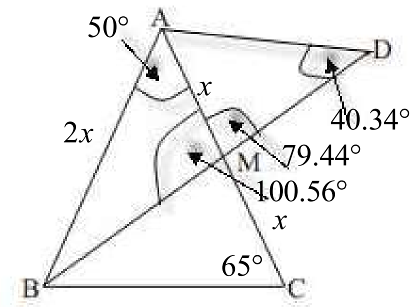
1. AB **משיק למעגל 2.** $DE = EC$ **.3** M **מרכז המעגל**

עבור ב: 4. T **מפגש תיכונים ב-** ΔBDC

עבור ג: 5. $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ **ס"מ .6** $MT = 1$ **ס"מ**

צ"ל: א. $AEMB$ **בר חסימה. ב.** $TB^2 = 2MT \cdot TA$ **ג. רדיוס המעגל החוסם את** $AEMB$

הסבר		טענה	נימוק
1	7	AB משיק למעגל	נתון
3	8	M מרכז המעגל	נתון
7, 8	9	$\sphericalangle ABM = 90°$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
2	10	$DE = EC$	נתון
8, 10	11	$\sphericalangle MEA = 90°$	קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך לו
9, 11	12	$\sphericalangle ABM + \sphericalangle MEA = 180°$	חישוב
12	13	$AEMB$ בר חסימה	סכום זוויות נגדיות במרובע $180°$
		מ.ש.ל. א	
13	14	$ET \cdot TB = MT \cdot TA$	שני מיתרים נחתכים במעגל, כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני
4	15	T מפגש תיכונים ב- ΔBDC	נתון
17, 18	19	$ET = \frac{TB}{2}$	תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ מהקדקוד
14, 19	20	$\frac{TB}{2} \cdot TB = MT \cdot TA$	הצבה
20	21	$TB^2 = 2MT \cdot TA$	חישוב
		מ.ש.ל. ב	
5	22	$TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ	נתון
6	23	$MT = 1$ ס"מ	נתון
19, 22	24	$TB = \sqrt{10}$ ס"מ	חישוב
21, 23, 24	25	$(\sqrt{10})^2 = 2 \cdot 1 \cdot TA$	הצבה
25	26	$TA = 5$ ס"מ	חישוב
23, 26	27	$MA = 6$ ס"מ	סכום קטעים
9	28	MA קוטר המעגל החוסם את $AEMB$	נשען על זווית היקפית ישרה
27, 28	29	רדיוס המעגל החוסם את $AEMB$ 3 ס"מ	רדיוס שווה למחצית הקוטר
		מ.ש.ל. ג	



א. נתון וסימון: $AB = AC = 2x$ **,** $AM = MC = x$ **.**

$\sphericalangle BAC = 50° \rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 65°$

(זוויות בסיס שוות במש"ש וסכום זוויות במשולש $180°$**)**

$\underline{\Delta BAM}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BM)^2 = (AB)^2 + (AM)^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos\sphericalangle BAC$$
$$(BM)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos 50°$$
$$(BM)^2 = 2.4288x^2$$
$$\boxed{BM = 1.5585x}$$

$\underline{\Delta BAM}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BM}{\sin\sphericalangle BAC} = \frac{AB}{\sin\sphericalangle AMB}$$
$$\sin\sphericalangle AMB = \frac{2x\sin 50°}{1.5585x}$$
$$\sin\sphericalangle AMB = 0.9831$$
$$\boxed{\sphericalangle AMB = 100.56°} \quad \leftarrow \sphericalangle AMB > 90°$$
$$\boxed{\sphericalangle AMD = 79.44°}$$

תשובה: $\sphericalangle AMB = 100.56°$.

ב. נתון גם: רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC **הוא** 10 **ס"מ.**

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle ACB} = 2R$$
$$AB = 2 \cdot 10 \sin 65$$
$$\boxed{AB = 18.126\ cm}$$

נתון גם: רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD **הוא** 14 **ס"מ.**

$\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle ADB} = 2R$$
$$\frac{18.126}{2 \cdot 14} = \sin\sphericalangle ADB$$
$$0.4674 = \sin\sphericalangle ADB$$
$$\boxed{\sphericalangle ADB = 40.34°}$$

האפשרות השנייה נפסלה עקב סכום זוויות במשולש $180°$**.**

את $\sphericalangle DAM = 60.22°$ **נקבל על פי סכום זוויות ב-** ΔADM **שווה** $180°$**.**

תשובה: $\sphericalangle AMD = 79.44°$ **,** $\sphericalangle ADM = 40.34°$, $\sphericalangle DAM = 60.22°$ **.**

א. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$ **ו-** $g(x)=\sin(2x)$ **בתחום** $0\le x\le \pi$**.**

(1) נמצא את שיעורי ה- x **של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.**

$$2\sin^2 x=\sin 2x$$
$$2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0$$
$$2\sin x(\sin x-\cos x)=0$$

$$\sin x=0 \qquad\qquad \sin x=\cos x \quad /:\cos x\neq 0$$
$$\tan x=1$$
$$x=\pi k \qquad\qquad x=\frac{\pi}{4}+\pi k$$
$$x=0 \quad \to (0,0) \qquad\qquad x=\frac{\pi}{4} \quad \to (\frac{\pi}{4},1)$$
$$x=\pi \quad \to (\pi,0)$$

תשובה: $x=0$ **,** $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{4}$**.**

(2) נמצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם ציר ה- x

$$\sin 2x=0$$
$$2x=\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{2}k$$
$$x=0 \quad \to (0,0)$$
$$x=\frac{\pi}{2} \quad \to (\frac{\pi}{2},0)$$
$$x=\pi \quad \to (\pi,0)$$

$$2\sin^2 x=0$$
$$\sin x=0$$
$$x=\pi k$$
$$x=0 \quad \to (0,0)$$
$$x=\pi \quad \to (\pi,0)$$

תשובה: $f(x)$ **:** $(0,0)$ **,** $(\pi,0)$**.** $g(x)$: $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\pi,0)$ **.**

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$**.**

$$h'(x)=1-\frac{2\cos(2x)}{2}$$
$$h'(x)=1-(1-2\sin^2 x))$$
$$h'(x)=2\sin^2 x$$
$$\boxed{h'(x)=f(x)}$$

תשובה: הוכח.

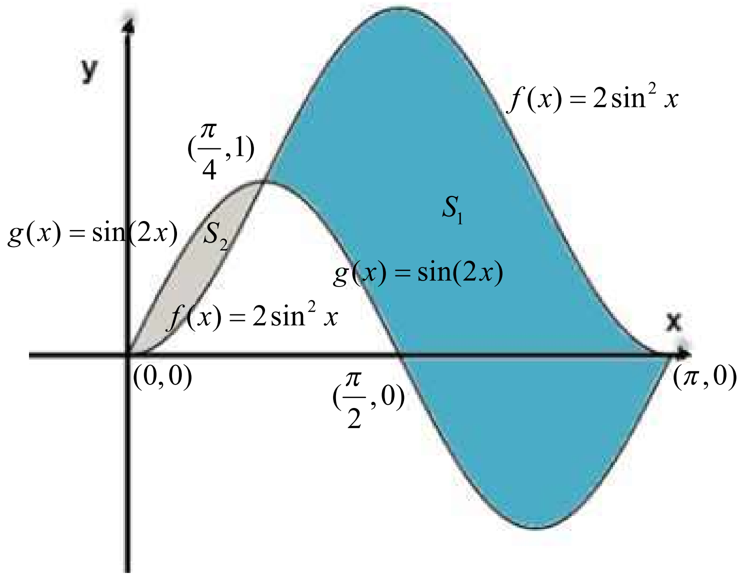
(2) נסרטט את שתי פונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$ **ו-** $g(x)=\sin(2x)$ **בתחום** $0\le x\le\pi$ **,**

על פי שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x **של הפונקציות ושיעורי נקודות החיתוך בין הפונקציות.**

כמו כן, שתי נקודות נוספות, במטרה לוודא איזו פונקציה מעל פונקציה, בשטחים המסומנים S_1 **ו-** S_2**,**

$$f(\frac{\pi}{8})=2\sin^2(\frac{\pi}{8})=0.29<g(\frac{\pi}{8})=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=0.707$$

$$f(\frac{3\pi}{4})=2\sin^2(\frac{3\pi}{4})=1>g(\frac{3\pi}{4})=\sin(2\cdot\frac{3\pi}{4})=-1$$



נחשב את שני השטחים: S_1 **ו-** S_2, **בהתבסס על תת סעיף ב(1) ולפיו:** $\int(2\sin^2 2x)\,dx=x-\frac{\sin(2x)}{2}+c$ **.**

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(2\sin^2 2x-\sin(2x))\,dx=$$

$$S_1=x-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}\Bigg]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=$$

$$x=\pi\quad \pi-\frac{\sin(2\pi)}{2}+\frac{\cos(2\pi)}{2}=\pi-0+\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{4}\quad \frac{\pi}{4}-\frac{\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}{2}+\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{4})}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+0$$

$$S_1=(\pi+\frac{1}{2})-(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$$

$$\boxed{S=\frac{3\pi}{4}+1}$$

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin(2x)-2\sin^2 2x)\,dx=$$

$$S_2=-\frac{\cos(2x)}{2}-x+\frac{\sin(2x)}{2}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$x=\frac{\pi}{4}\quad -\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{4})}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}{2}=0-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$$x=0\quad -\frac{\cos(2\cdot 0)}{2}-0+\frac{\sin(2\cdot 0)}{2}=-\frac{1}{2}-0+0$$

$$S_2=(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})-(-\frac{1}{2})$$

$$\boxed{S_2=-\frac{\pi}{4}+1}$$

וגודל השטח המבוקש: $S=S_2+S_2=\frac{3\pi}{4}+1+-\frac{\pi}{4}+1=\frac{\pi}{2}+2$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{\pi}{2}+2$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$ ($a>0$ פרמטר).

(1) הביטוי ax^2 אי-שלילי עבור $a>0$ ולכן הסכום שלו עם 9 חיובי והביטוי שבתוך השורש חיובי לכל x.

תשובה: תחום ההגדרה: כל x.

(2) נראה כי לפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$ אין נקודות פיתול.

נראה כי סימני הנגזרת השנייה אינם מחליפים סימן.

$$f'(x)=\frac{\cancel{2}ax}{\cancel{2}\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}}$$

$$f''(x)=a\cdot\frac{\sqrt{ax^2+9}-\frac{\cancel{2}ax^2}{\cancel{2}\sqrt{ax^2+9}}}{ax^2+9}$$

$$f''(x)=a\cdot\frac{ax^2+9-ax^2}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{9a}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}}$$

מכנה הנגזרת חיובי לכל x, מונה הנגזרת השנייה חיובי עבור $a>0$ –

לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ לכל x ואין לה נקודות פיתול.

תשובה: הוכח.

ב. נחקור את פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}$.

(1) הביטוי ax^2 אי-שלילי עבור $a>0$ ולכן הסכום שלו עם 9 חיובי והביטוי שבתוך השורש חיובי לכל x.

תשובה: תחום ההגדרה: כל x.

(2) סימן ערכי הנגזרת נקבע בהתאם למונה:

כאשר $x>0$ הפונקציה חיובית, וכאשר $x<0$ הפונקציה שלילית.

או, $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{a}|x|\sqrt{1+\frac{9}{ax^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{a}x}{|x|}=\pm\sqrt{a}$$

תשובה: $y=-\sqrt{a}\quad,\quad y=\sqrt{a}$

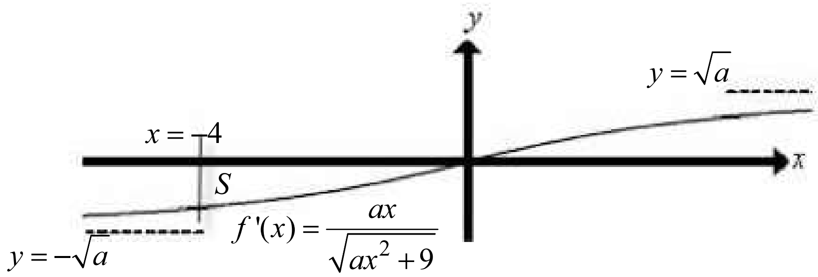
(3) ראינו כי $f''(x)>0$ לכל x ולכן $f'(x)$ עולה לכל x.

תשובה: עליה: כל x, ירידה: אף x.

(4) קל לראות שהפונקציה $f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}$ **עוברת בראשית הצירים, וגם פונקציה אי-זוגית.**

$$. f'(-x)=\frac{a(-x)}{\sqrt{a(-x)^2+9}}=-\frac{ax)}{\sqrt{ax^2+9}}=-f'(x)$$

נסרטט את הסקיצה כולל סימון השטח עבור סעיף ג.



ג. נמצא את גודל השטח השווה ל- 2 **.**

$$S=\int_{-4}^{0}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{-4}^{0}$$

$$S=(-f(0)-(-f(-4))$$

$$S=(-\sqrt{a\cdot 0^2+9})+f(-4)$$

$$\boxed{S=-3+f(-4)}$$

$$2=-3+f(-4)$$

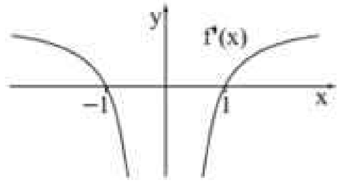
$$\boxed{f(-4)=5}$$

נראה ש- $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$ **זוגית:** $f(-x)=\sqrt{a(-x)^2+9}=\sqrt{ax^2+9}=f(x)$ **.**

לכן: $f(4)=f(-4)=5$ **.**

תשובה: $f(-4)=5$ **,** $f(4)=5$ **.**

א. בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x=0$ (אסימפטוטה יחידה המקבילה לצירים (ע.י.)).

על פי גרף פונקציית הנגזרת ניתן ללמוד מספר דברים:

הנגזרת חיובית עבור $x>1$ או $x<-1$ ולכן הפונקציה $f(x)$ עולה בתחומים אלה.

הנגזרת שלילית עבור $0<x<1$ או $-1<x<0$ ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחומים אלה.

הנגזרת יורדת עבור $x<0$ ובהתאם $f''(x)<0$ והפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x<0$.

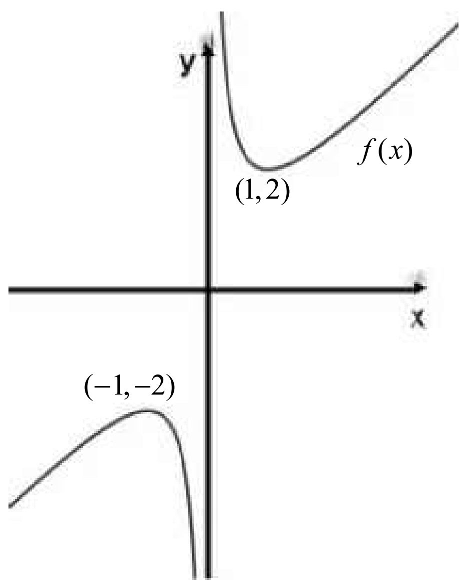
הנגזרת עולה עבור $x>0$ ובהתאם $f''(x)>0$ והפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x>0$.

כמוכן, בגלל שגרף הנגזרת אינו שואף לאפס, כאשר $x\to\pm\infty$, ולכן אין אסימפטוטה אופקית ל- $f(x)$.

מכאן ש- $x=1$ הוא מינימום של הפונקציה ו- $x=-1$ הוא מקסימום של הפונקציה.

כיוון שיש רק פתרון אחד למשוואה $f(x)=-2$ הרי ש- $(-1,-2)$ היא נקודת המקסימום של הפונקציה.

כיוון שיש רק פתרון אחד למשוואה $f(x)=2$ הרי ש- $(1,2)$ היא נקודת המינימום של הפונקציה.



ב. נתון גם כי $f'(x)=\frac{ax^2-b}{ax^2}\quad(a,b\neq 0)$

על פי גרף הנגזרת $f'(1)=0$ **ולכן:** $0=a(-1)^2-b$ **ומכאן ש-** $a=b$.

$f'(x)=\frac{ax^2-a}{ax^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}$ **.**

נמצא את הפונקציה הקדומה, תוך הצבת שיעורי הנקודה $(1,2)$ **למציאת קבוע האינטגרציה.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int(1-\frac{1}{x^2})\,dx$$

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+c$$

$$2=1+\frac{1}{1}+c$$

$$0=c$$

$$\boxed{f(x)=x+\frac{1}{x}}$$

תשובה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **.**