א. נסמן ב- t את הזמן (שעות) שעבר עד למפגש בין מכונית I למכונית II.

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מהתחלה עד למפגש בין מכונית III למכונית II	מכונית I	t	50	$50t$
	מכונית II	t	40	$40t$

המשוואה הראשונה נבנית על פי המרחק בין מכונית I למכונית II, שהוא 15 ק"מ.

$$40t+15=50t$$
$$15=10t$$
$$t=1.5$$

שתי המכוניות נפגשו לאחר שעה וחצי.

ניתן היה גם לומר, שכיוון שהפרש המהירויות הוא 10 קמ"ש,

אז 1.5 שעות $= 15:10$ הוא הזמן הנדרש ליצירת הפרש המרחקים.

מכונית II עברה עד למפגש עם מכונית III 60 ק"מ $=40\cdot1.5$,

שזה גם המרחק שעברה מכונית III בשעה אחת (כי יצאה חצי שעה לאחריה),

ומכאן שמהירותה של מכונית III היא 60 קמ"ש.

תשובה: מהירותה של מכונית III היא 60 קמ"ש.

ב. נבדוק האם ייתכן שהמרחק בין מכוניות III ו- I שווה למרחק שבין מכוניות II ו- I.

נסמן ב- s את הזמן שעבר מיציאת שתי המכוניות הראשונות ועד לזמן בו המרחקים שווים.

(1) לפני הפגישה בין מכונית III למכונית I:

המשוואה המתאימה: $50s-60(s-0.5)=50s-40s$.

ונקבל:

$$-10s+30=10s$$
$$s=1.5$$

אולם זה הזמן שבו מכונית I ומכונית II נפגשו, כלומר לפני שמכונית III נפגשה עם מכונית II,

ולכן לא מתאים לנדרש.

(2) אחרי הפגישה בין מכונית III למכונית I:

המשוואה המתאימה: $60(s-0.5)-50s=50s-40s$.

ונקבל: $10s-30=10s$ **ואין פתרון.**

תשובה: לא ייתכן.

א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת $a_1, a_2, a_3, \ldots$**, שכל איבריה חיוביים ולכן** $0<q<1,\ a_n>0$**.**

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ **מסכום שני האיברים הסמוכים לו,**

לכן: $a_n = 0.4(a_{n-1}+a_{n+1})$ **עבור** $n>1$ **.**

נמצא את מנת הסדרה.

$$a_n = 0.4(a_{n-1}+a_{n+1})$$

$$a_n = 0.4(\frac{a_n}{q}+a_n q) \quad /:a_n>0$$

$$1 = 0.4(\frac{1}{q}+q)$$

$$0.4q^2 - q + 0.4 = 0$$

$$\boxed{q=0.5} \quad \cancel{q=2} \quad \leftarrow 0<q<1$$

תשובה: מנת הסדרה a_n **היא** 0.5**.**

ב. (1) נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$**. נראה שהסדרה היא סדרה הנדסית.**

$$b_n = \frac{a_n q}{(a_n)^2} \quad \to \boxed{b_n = \frac{1}{2a_n}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{2a_{n+1}}}{\frac{1}{2a_n}} = \frac{2a_n}{2a_{n+1}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{0.5} \quad \to \boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2}$$

תשובה: הסדרה b_n **הנדסית, כי המנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה (**$q_b=2$**).**

(2) נתון כי $S_{10} = 20,460$ **בסדרה** b_n**.**

$$20,460 = \frac{b_1(2^{10}-1)}{2-1} \quad \to 20,460 = 1023b_1$$

$$\boxed{b_1 = 20}$$

על פי הקשר בין a_n **ל-** a_n **:** $\boxed{a_1 = \frac{1}{40}} \leftarrow \quad 20 = \frac{1}{2a_1}$

נחשב את סכום כל האיברים בסדרה a_n**:** $S = \frac{\frac{1}{40}}{1-0.5} = \frac{1}{20}$

תשובה: הסכום הוא $\frac{1}{20}$**.**

א. מספר הספרות הזוגיות הוא 3**.**

נסמן ב- x **את מספר הספרות האי-זוגיות, ולכן מספר הספרות הכולל הוא** $x+3$**.**

מספר אי-זוגי מתקבל אם הספרה השנייה שיוני בוחר היא אי-זוגית.

לכן, מספר זה יתקבל אם יוני יבחר ספרה זוגית ראשונה ושנייה אי-זוגית או שתי ספרות אי זוגיות.

נשים לב שההוצאה היא ללא החזרה, ולכן לאחריה נשארות $x+2$ **ספרות.**

$$\frac{4}{7}=\frac{3}{x+3}\cdot\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x-1}{x+2}$$

$$\frac{4}{7}=\frac{3x+x(x-1)}{(x+3)(x+2)}$$

$$4(x+3)(x+2)=7(3x+x(x-1))$$

$$4(x^2+5x+6)=7(2x+x^2)$$

$$0=3x^2-6x-24$$

$$x=4 \quad \cancel{x=-2} \quad \leftarrow x\ natural$$

תשובה: מספר הספרות האי-זוגיות בקבוצה הנתונה הוא 4**.**

ב. נמצא את ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות, אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי.

על פי הנתון בסעיף א: ההסתברות שהמספר שנוצר הוא זוגי היא $\frac{3}{7}$**.**

האפשרות ששתי הספרות הן זוגיות היא : $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$**.**

לכן ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{1/7}{3/7}=\frac{1}{3}$**.**

ניתן גם, כמובן,

$$p(2\ even\ digits\ /\ even\ number)=\frac{P(2\ even\ digits\cap even\ number)}{P(even\ number)}=\frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{1}{3}$**.**

ג. אמילי בוחרת שלוש ספרות, אולם כיוון שנתון כי הספרה הראשונה (ספרת המאות) היא זוגית,

הרי שיש לחשב הסתברות לכך שסכום שתי הספרות הבאות הוא זוגי –

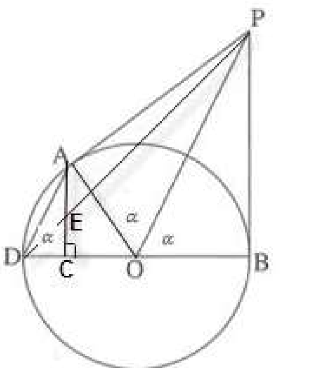
ואז סכום שלוש הספרות יהיה גם זוגי.

כיוון שאמילי הוציאה ספרה זוגית – נותרו 2 **ספרות זוגיות ו-** 4 **ספרות אי-זוגיות.**

סכום שתי הספרות יהיה זוגי – אם שתיהן תהיינה זוגיות, או ששתיהן תהיינה אי-זוגיות.

$$p(sum\ is\ even\ number)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{15}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{7}{15}$**.**



בגרות

1. PA **משיק למעגל בנקודה** A **.2** PB **משיק למעגל בנקודה** B **.3** O **מרכז המעגל.**

עבור ב: .4 $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = 90^\circ$.

צ"ל: א. $PO \parallel AD$ **ב.** $\Delta ADC \sim \Delta POB$ **ג.** $\Delta DEC \sim \Delta DPB$ **ד.** $AC = 2EC$

הסבר		טענה	נימוק
1	5	PA משיק למעגל בנקודה A	נתון
2	6	PB משיק למעגל בנקודה B	נתון
3	7	O מרכז המעגל	נתון
5, 6, 7	8	$\sphericalangle AOP = \sphericalangle BOP = \alpha$	אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל, אז הקטע שמחבר אותה למרכז המעגל חוצה את הזווית המרכזית המתאימה + סימון
8	9	$\sphericalangle AOB = 2\alpha$	סכום זוויות
7, 9	10	$\sphericalangle ADB = \alpha$	זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת $\overset{\frown}{AB}$
8, 10	11	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle POB$ (ז)	כלל המעבר
11	12	$PO \parallel AD$	אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים
		מ.ש.ל. א	
4	13	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = 90^\circ$	נתון
6, 7	14	$\sphericalangle PBO = 90^\circ$	המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה
13, 14	15	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle PBO$ (ז)	כלל המעבר
11, 15	16	$\Delta ADC \sim \Delta POB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
3	17	$\sphericalangle EDC = \sphericalangle PDB$ (ז)	זווית משותפת
15, 17	18	$\Delta DEC \sim \Delta DPB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ג	
16	19	$\frac{AD}{PO} = \frac{AC}{PB} = \frac{DC}{OB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
17	20	$\frac{DE}{DP} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{PB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
7, 20	21	$\frac{DC}{2OB} = \frac{EC}{PB}$	קוטר המעגל שווה לשני רדיוסים והצבה
21	22	$\frac{DC}{OB} = \frac{2EC}{PB}$	חישוב
19, 22	23	$\frac{AC}{PB} = \frac{2EC}{PB}$	כלל המעבר
23	24	$AC = 2EC$	חישוב
		מ.ש.ל. ד	

א. $ABCD$ **טרפז, שבו** $BC \parallel AD$.

$CE \parallel BD$ **ולכן המרובע** $BCED$ **הוא מקבילית.**

$DB = 1.8AC$ **(נתון)** $AC = x$ **(סימון) ובהתאם** $BD = 1.8x$.

$CE = BD$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית) ולכן גם** $CE = 1.8x$.

$\sphericalangle BDA = \sphericalangle CEA = \alpha$ **(זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים).**

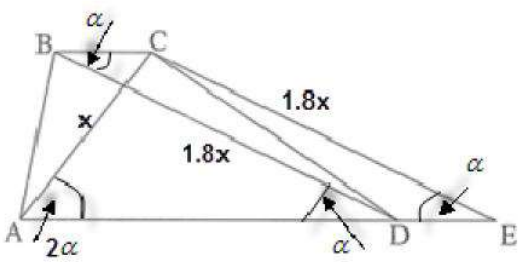
$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBC = 2\alpha$.

ΔACE **על פי משפט הסינוסים:**

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{CE}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1.8x}{x}$$

$$\boxed{\alpha = 25.84^\circ} \quad \leftarrow 0 < \alpha < 90^\circ$$



תשובה: $\alpha = 25.84^\circ$.

ב. נתון: $S_{\Delta ACE} = 87.873$ **סמ"ר.**

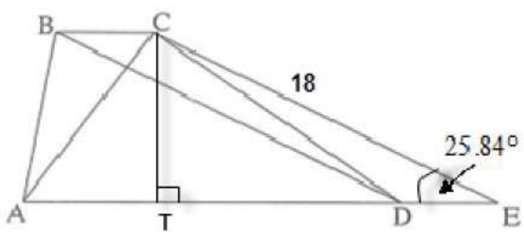
$\sphericalangle ACE = 180^\circ - 3\cdot 25.84^\circ = 102.47^\circ$.

$$S_{\Delta ACE} = \frac{AC\cdot CE\cdot \sin\sphericalangle ACE}{2}$$

$$87.873 = \frac{x\cdot 1.8x\cdot \sin 102.47^\circ}{2}$$

$$100 = x^2$$

$x = 10$ **ס"מ**



נוריד גובה CT **של הטרפז מהקודקוד** C.

$CE = 10\cdot 1.8 = 18$ **ס"מ.**

ΔCTE **ישר זווית:**

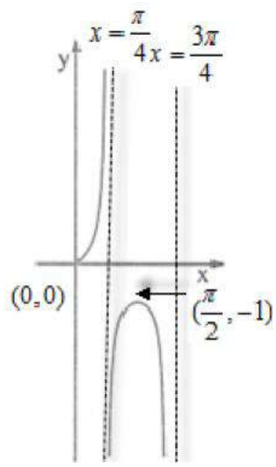
$$\sin 25.84 = \frac{CT}{CE}$$

$$18\sin 25.84 = CT$$

$CT = 7.845$ **ס"מ**

תשובה: גובה הטרפז הוא 7.845 **ס"מ.**

א. נתונה הפונקציה: $\boxed{f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}}$ **והתחום** $0\le x\le \dfrac{3\pi}{4}$.



(1) נמצא את תחום ההגדרה

$$\cos 2x\ne 0$$
$$2x\ne \frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x\ne \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$
$$x\ne \frac{\pi}{4},\quad x\ne \frac{3\pi}{4}$$

בתחום הנתון $x\ne \dfrac{3\pi}{4},\quad x\ne \dfrac{\pi}{4}$.

תשובה: $0\le x<\dfrac{3\pi}{4},\ x\ne \dfrac{\pi}{4}$.

(2) תשובה: האסימפטוטות האנכיות הן הישרים $x=\dfrac{3\pi}{4},\quad x=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) נמצא תחילה את ערך הפונקציה בנקודת הקצה, שהיא נקודת מינימום על פי הציור:

$$f(0)=\frac{\sin 0}{\cos 2\cdot 0}=0\quad\rightarrow \boxed{(0,0)}$$

נמצא את נקודת המקסימום:

$$f'(x)=\frac{\cos x\cos 2x+2\sin x\sin 2x}{(\cos 2x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{\cos x\cos 2x+4\sin^2 x\cos x}{(\cos 2x)^2}\quad\leftarrow \sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\cos x(\cos 2x+4\sin^2 x)}{(\cos 2x)^2}}$$
$$\cos x=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ \rightarrow f(\frac{\pi}{2})=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}=-1\quad\rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},-1)}$$

הביטוי $\cos 2x+4\sin^2 x$ **חיובי , כי** $\cos 2x+4\sin^2 x=1-2\sin^2 x+4\sin^2 x=2\sin^2 x+1$.

$x=\dfrac{\pi}{2}$ **הוא הפתרון היחידי בתחום** $0\le x<\dfrac{3\pi}{4},\ x\ne\dfrac{\pi}{4}$.

תשובה: $(0,0)$ **מינימום,** $(\dfrac{\pi}{2},-1)$ **מקסימום.**

ב. נצייר את הסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

תחומי החיוביות/ שליליות שלה תואמים את תחומי העלייה/ ירידה של $f(x)$.

לכן, היא חיובית עבור $0<x<\frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, ושלילית עבור $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

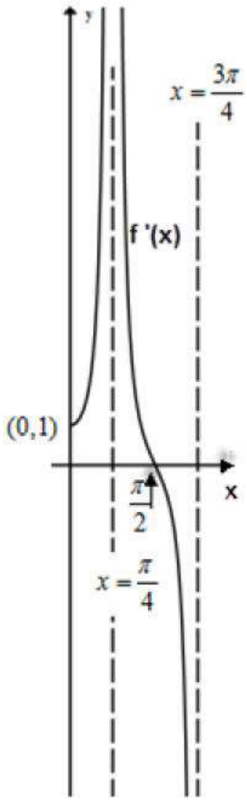
כמו כן $f'(0)=\frac{\cos 0\cdot(\cos(2\cdot 0)+4\sin^2 0)}{(\cos(2\cdot 0))^2}=1$ **,**

ולכן $f'(x)$ נוגעת בציר ה- y בנקודה $(0,1)$, נקודת הקצה שלה.

האסימפטוטות האנכיות הן עדיין $x=\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$ **,**

שכן שיפועי $f(x)$ שואפים ל- $\pm\infty$ בסביבות הישרים.

תשובה: הסקיצה משמאל.



ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=2f(x)\cdot f'(x)$.

$g(0)=2f(0)\cdot f'(0)=2\cdot 0\cdot 1=0$ **.**

בתחום $0<x<\frac{\pi}{6}$ $g(x)$ חיובית כי $f(x)$ חיובית ועולה, על פי הציור הנתון,

ולכן השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ,

על ידי ציר ה- x והישר $x=\frac{\pi}{6}$ הוא מעל ציר ה- x .

נחשב את גודלו על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית של $f(x)$.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2f(x)\cdot f'(x)-0)\,dx=$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2[f(x)]^1\cdot f'(x))\,dx=$$

$$S=\frac{2[f(x)]^2}{2}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$S=f^2(\frac{\pi}{6})-f^2(0)=(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}})^2-0=1-0=1$$

$$\boxed{S=1}$$

תשובה: גודל השטח הוא 1 יח"ר.

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$ **,** $a>0$

המכנה מתאפס עבור $x=1$ **ולכן תחום ההגדרה הוא** $x\neq 1$ **.**

תשובה: $x\neq 1$ **.**

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ **, לכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

$\lim_{x\to1^-}=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}=\frac{9}{0^-}=-\infty$ $\quad \lim_{x\to1^+}=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}=\frac{9}{0^+}=+\infty$ **, לכן** $x=1$ **אסימפטוטה אנכיות.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=1$ **אסימפטוטה אנכית.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x .

$$0=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}\quad /\cdot(x-1)^3$$
$$0=(x+2)^2$$
$$x=-2\quad\to(-2,0)$$

נקודת חיתוך עם ציר ה- y **:** $f(0)=\frac{(0+2)^2}{(0-1)^3}=\frac{4}{-1}=-4\quad\to(0,-4)$

תשובה: $(0,-4)$ **,** $(-2,0)$ **.**

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)^3-3(x+2)^2(x-1)^2}{(x-1)^6}$$
$$f'(x)=\frac{(x+2)(x-1)^2(2(x-1)-3(x+2))}{(x-1)^6}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{(x+2)(-x-8)}{(x-1)^4}}$$
$$x+2=0\quad\to x=-2\quad\to(-2,0)$$
$$-x-8=0\quad\to x=-8\quad\to(-8,-\frac{4}{81})$$

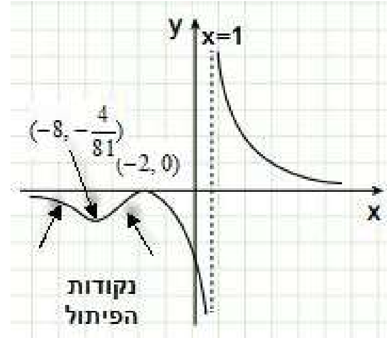
הביטוי האלגברי $(x+2)(-x-8)$ **במונה הוא של פרבולה הפוכה (בעלת מקסימום)**

הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות עבור $x=-8$ **ו-** $(-8,-\frac{4}{81})$ **נקודת מינימום.**

הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=-2$ **ו-** $(-2,0)$ **נקודות מקסימום.**

תשובה: $(-2,0)$ **נקודת מקסימום,** $(-8,-\frac{4}{81})$ **נקודות מינימום.**

(5) סרטוט הסקיצה המתאימה, כולל סימון מיקום משוער של שתי נקודות הפיתול:



ב. שתי נקודות הפיתול מסומנות בסקיצה: אחת בתחום $-8 < x < -2$ **והשנייה בתחום** $x < -8$.

הראשונה בתחום בו הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה, בין נקודות הקיצון.

השנייה בשל המעבר לקעירות כלפי מטה בשאיפה לאסימפטוטה $y = 0$ **,**

תשובה: אחת בתחום $-8 < x < -2$ **והשנייה בתחום** $x < -8$.

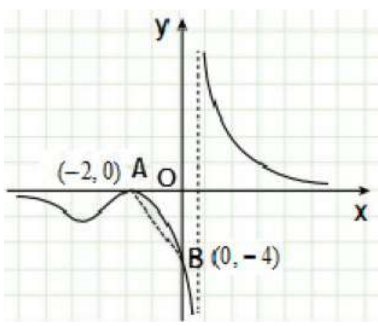
ג. שטח המשולש ABO **שווה ל-** $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$ **.**

כיוון שהפונקציה קעורה כלפי מטה בתחום $-2 < x < 0$ **,**

אז הגרף של $f(x)$ **בתוך המשולש,**

ולכן השטח המוגבל על ידי $f(x)$ **והצירים קטן מ-** 4 **.**

תשובה: קטן מ- 4 **.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+a^2$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר).**

נראה כי ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה הוא חיובי.

$$\boxed{f'(x)=x^2-a^2}$$

$$0=x^2-a^2$$

$$x=a \quad \to y=\frac{1}{3}a^3-a^2\cdot a+a^2=-\frac{2}{3}a^3+a^2=a^2(-\frac{2}{3}a+1)$$

$$x=-a \quad \to y=\frac{1}{3}(-a)^3-a^2\cdot(-a)+a^2=\frac{2}{3}a^3+a^2=a^2(\frac{2}{3}a+1)$$

גרף הנגזרת הוא של פרבולה בעלת מינימום ("צוחקת"),

לכן הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=-a$ **, וזה שיעור ה-** x **של נקודת המקסימום.**

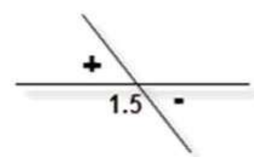
שיעור ה- y **הוא** $a^2(\frac{2}{3}a+1)$**, וכיוון ש-** $a>0$ **נקבל ש-** $y>0$ **.**

תשובה: הוּכַח.

ב. הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות עבור $x=a$ **, וזה שיעור ה-** x **של נקודת המינימום.**

שיעור ה- y **הוא** $a^2(-\frac{2}{3}a+1)$**, וסימן ערכו נקבע על ידי הביטוי** $-\frac{2}{3}a+1$,

המיוצג על ידי קו ישר יורד, ומתאפס עבור $a=1.5$**.**



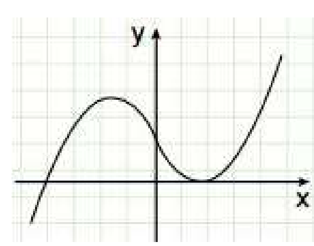
(1) נקודת המינימום על ציר ה- x **עבור** $a=1.5$.

(2) נקודת המינימום מעל ציר ה- x **עבור** $0<a<1.5$ **(נתון כי** $a>0$**).**

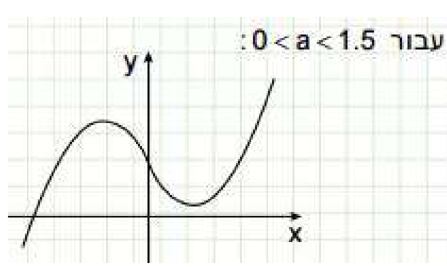
(3) נקודת המינימום מתחת לציר ה- x **עבור** $a>1.5$**.**

ג. הגרפים המתאימים:

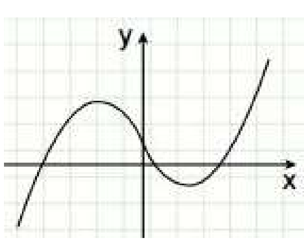
עבור $a=1.5$



עבור $0<a<1.5$



עבור $a>1.5$



ד. נשים לב כי המשוואה $\frac{1}{3}x^3-x+1=0$ **מתאימה ל-** $f(x)=0$ **עבור** $a=1$**.**

על פי הגרף המתאים (האמצעי, עבור $0<a<1.5$**) יש רק פתרון אחד.**

תשובה: פתרון אחד.