א. נסמן ב- t **את הזמן (שניות) שיוסי רץ, מרגע ירידתו מהאוטובוס ועד לרגע שהשיג את אימו.**
נסמן ב- x **את מהירות האם (ק"מ לשנייה), ובהתאם** $2x$ **מהירות יוסי, ו-** $14x$ **מהירות האוטובוס.**
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שניות	מהירות - v ק"מ לשנייה	דרך-מרחק - s ק"מ
אוטובוס (כאשר יוסי עליו)	10	$14x$	$140x$
יוסי בריצה	t	$2x$	$2xt$
אמא (מרגע שיוסי הבחין בה)	$t+10$	x	$x(t+10)$

המרחק שיוסי רץ שווה למרחק שהאוטובוס עבר עם יוסי בכיוון אחד ועוד המרחק שהאם עברה בכיוון השני.

$$2xt = 140x + x(t+10) \quad / : x > 0$$
$$2t = 140 + t + 10$$
$$\boxed{t = 150}$$

תשובה: יוסי רץ 150 **שניות (שתי דקות וחצי) כדי להשיג את אימו.**

ב. יוסי הלך עם אימו, בקצב שלה, 3 **דקות, כלומר** 180 **שניות, כאשר הם מתרחקים מהתחנה בה ירד.**
לכן אורך הדרך שעליו לעבור לתחנה, בחזרה, היא המרחק שהלך עם אימו ועוד המרחק שרץ ע"מ להשיגה,
מרחק של $180x + 2x\cdot 150 = 480x$.
המהירות שבה עבר יוסי מרחק זה, מהירות הריצה, היא $2x$**,**
ובהתאם זמן הריצה בחזרה הוא $\frac{480x}{2x} = 240$.
תשובה: יוסי רץ בחזרה לתחנת האוטובוס 240 **שניות (ארבע דקות).**

א. נתונה סדרה הנדסית המקיימת $b_{n+1}=\frac{1}{2^n\cdot b_n}$ **.**

נראה שאיברי הסדרה במקומות האי-זוגיים (וגם אלו שבמקומות הזוגיים) מהווים סדרה הנדסית.

$$b_{n+1}=\frac{1}{2^n\cdot b_n}$$

$$b_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}\cdot b_{n+!}}$$

$$b_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n\cdot b_n}{1}$$

$$b_{n+2}=\frac{b_n}{2}$$

$$\boxed{\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{1}{2}}$$

המנה בין כל שני איברים עוקבים, בשתי הסדרות (דילוג איבר במקורית) קבועה, לא תלויה ב- n **.**

לכן, שתי הסדרות הן הנדסיות, ומנת כל אחת מהן $q=0.5$.

תשובה: הוכח.

ב. סכום 8 **האיברים הראשונים בסדרה** b_n **שווה ל-** $3\frac{7}{16}$**.**

נבטא את b_2 **באמצעות** b_1 **על פי הכלל הנתון:** $b_2=\frac{1}{2b_1} \leftarrow b_2=\frac{1}{2^1\cdot b_1}$ **,**

ונחשב את סכום שמונת האיברים הראשונים,

באמצעות סכום ארבעת האיברים הראשונים בשתי הסדרות ההנדסיות.

$$3\frac{7}{16}=\frac{b_1(0.5^4-1)}{0.5-1}+\frac{b_2(0.5^4-1)}{0.5-1}$$

$$3\frac{7}{16}=\frac{(0.5^4-1)}{0.5-1}(b_1+\frac{1}{2b_1})$$

$$\frac{11}{6}=b_1+\frac{1}{2b_1}$$

$$6(b_1)^2-11b_1+3=0$$

$$\boxed{b_1=1.5}\quad\boxed{b_1=\frac{1}{3}}$$

תשובה: $b_1=1.5$ **או** $b_1=\frac{1}{3}$ **.**

א. (1) נסמן ב- p **את ההסתברות שסטודנט שנבחר באקראי מביא אוכל מהבית.**

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=4$, $p=p$ **,** $k=2$ **או** $k=1$**.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ערכו של p **:**

$$\mathrm{P}_4(2)=6\cdot\mathrm{P}_4(1)$$

$$\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{4-2}=6\cdot\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3$$

$$6p^2\cdot(1-p)^2=6\cdot4\cdot p\cdot(1-p)^3 \quad /:6p(1-p)^2>0$$

$$p=4(1-p)$$

$$\boxed{p=0.8}$$

תשובה: 80% **מהסטודנטים מביאים אוכל מהבית.**

(2) ההסתברות שלפחות אחד מתוך שמונה סטודנטים, או כל השמונה, מביאים אוכל מהבית,

היא המאורע המשלים למאורע "אף אחד (0.2^8**), או כל השמונה (** 0.8^8**), מביאים אוכל מהבית"**

$$P=1-0.8^8-0.2^8$$

$$\boxed{P=0.8322}$$

תשובה: ההסתברות היא 0.8322**.**

ג. (1) נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- מביאים אוכל מהבית** $\overline{A}$ **- לא מביאים אוכל מהבית**

B **- אוכלים בקפיטריה** $\overline{B}$ **- לא אוכלים בקפיטריה**

<u>נתונים ומשמעויות מיידיות</u>

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית, אוכלים אותו ולא אוכלים בקפיטריה, לכן $P(A\cap B)=0$ **.**

כיוון שעל פי סעיף א: $P(A)=0.8$ **- אז** $P(A\cap\overline{B})=0.8$ **וכמובן** $P(\overline{A})=0.2$ **.**

בנוסף : $P(B/\overline{A})=0.4 \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A})=0.6$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.6=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{0.2}$$

$$P(\overline{B}\cap\overline{A})=0.12$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים.

	A **- מביאים אוכל מהבית**	$\overline{A}$ **- לא מביאים אוכל מהבית**	
B **- אוכלים בקפיטריה**	0	0.08	0.08
$\overline{B}$ **- לא אוכלים בקפיטריה**	0.8	0.12	0.92
	0.8	0.2	1

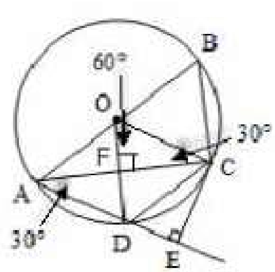
תשובה: 8% **מהסטודנטים אוכלים בקפיטריה.**

(2) הסטודנטים שאוכלים במשך היום,

הם אלו שהביאו אוכל מהבית (80%**) או אלו שאוכלים בקפיטריה (**8%**).**

לכן ההסתברות למצוא מביניהם, סטודנט שמביא אוכל מהבית, היא $\frac{10}{11}=\frac{0.8}{0.8+0.08}$ **.**

תשובה: ההסתברות היא $\frac{10}{11}$ **.**



<u>נתונים</u>

1. $ABCD$ **חסום במעגל 2.** AB **קוטר 3.** $CE \perp AE$.

עבור ב: 4. $OD \perp AC$ **. 5.** $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$

צ"ל: א. $\Delta CDE \sim \Delta ABC$ **ב.** $OC \parallel AD$ **ג.** CE **משיק למעגל**

הסבר		טענה	נימוק
1	6	$ABCD$ **חסום במעגל**	**נתון**
6	7	$\sphericalangle B + \sphericalangle ADC = 180°$	**סכום זוויות נגדיות במעגל הוא** $180°$
	8	$\sphericalangle CDE + \sphericalangle ADC = 180°$	**סכום זוויות צמודות הוא** $180°$
8 ,7	9	$\sphericalangle CDE = \sphericalangle B$ **(ז)**	**חישוב**
3	10	$\sphericalangle E = 90°$	**נתון**
2	11	AB **קוטר**	**נתון**
11	12	$\sphericalangle BCA = 90°$	**זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא ישרה**
12 ,10	13	$\sphericalangle E = \sphericalangle BCA$ **(ז)**	**כלל המעבר**
13 ,9	14	$\Delta CDE \sim \Delta ABC$	**משפט דמיון זווית זווית**
		מ.ש.ל. א	
5	15	$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$	**נתון**
15 ,14	16	$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$	**יחס צלעות במשולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון**
16 ,10	17	$\sphericalangle CAE = 30°$	**במשולש ישר זווית** ΔCAE **, הזווית שמול הניצב ששווה למחצית היתר שווה ל-** $30°$
17	18	$\sphericalangle COD = 60°$	**זווית מרכזית כפולה מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה הקשת,** $\overset{\frown}{DC}$
4	19	$OD \perp AC$	**נתון**
19 ,18	20	$\sphericalangle OCA = 30°$	**סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔCFO
20 ,17	21	$\sphericalangle OCA = \sphericalangle CAE$	**כלל המעבר**
21	22	$OC \parallel AD$	**אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים**
		מ.ש.ל. ב	
22 ,10	23	$OC \perp CE$	**אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי**
23	24	CE **משיק למעגל**	**מאונך לרדיוס בנקודה שעל המעגל**
		מ.ש.ל. ג	

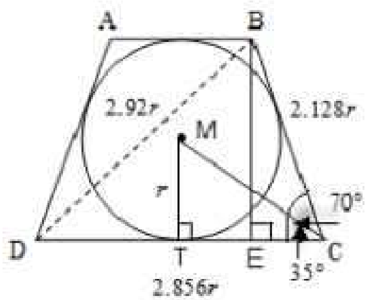
א. (1) $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים, שרדיוס המעגל החסום בו הוא** r**.**

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות, לכן $\sphericalangle MCT = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$ **.**

הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ולכן ΔMTC **ישר זווית.**

כיוון שהטרפז שווה שוקיים אז גם $\sphericalangle MDT = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$ **ו-** ΔDMC **שווה שוקיים.**

לכן, הרדיוס הוא גם תיכון לבסיס המשולש ו- $BC = 2TC$**.**



$\underline{\Delta MTC}$

$\tan 35^\circ = \frac{MT}{TC}$

$TC = \frac{r}{\tan 35^\circ}$

$\boxed{TC = 1.428r}$

$\boxed{DC = 2.856r}$

תשובה: הבסיס הגדול של הטרפז הוא $2.856r$**.**

(2) נוריד גובה BE **לבסיס הגדול של הטרפז, כאשר אורכו הוא** $2r$ **(מרחקים שווים בין ישרים מקבילים).**

$\underline{\Delta BEC}$

$\sin 70^\circ = \frac{BE}{BC}$

$BC = \frac{2r}{\sin 70^\circ}$

$\boxed{BC = 2.128r}$

תשובה: שוק הטרפז היא $2.128r$**.**

(3) $\underline{\Delta BCD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\sphericalangle C$$
$$(BD)^2 = (2.128r)^2 + (2.856r)^2 - 2 \cdot 2.128r \cdot 2.856r \cdot \cos 70^\circ$$
$$(BD)^2 = 4.528r^2 + 8.157r^2 - 4.157r^2$$
$$(BD)^2 = 8.528r^2$$
$$\boxed{BD = 2.92r} \quad \leftarrow BD > 0$$

תשובה: אלכסון הטרפז הוא $2.92r$**.**

ב. המעגל החוסם את הטרפז $ABCD$ **חוסם גם את** ΔDBC**.**

$\underline{\Delta DBC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$2R = \frac{BD}{\sin 70^\circ} \quad \to R = \frac{2.92r}{2\sin 70^\circ} \quad \to \boxed{R = 1.554r}$$

והיחס המבוקש: $\frac{r}{R} = \frac{r}{1.554r} = 0.6435$**.**

תשובה: היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז הוא 0.6435 **.**

א. נתונה הפונקציה: $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{\sin x\cos x}}$ **והתחום** $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה

$$f(x)=\frac{2}{\sin 2x}$$
$$\sin 2x\ne 0$$
$$2x\ne\pi k$$
$$x\ne\frac{\pi}{2}k$$

תשובה: $x\ne 0$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ **.**

(בהתאם, לגרף הפונקציה שלוש אסימפטוטות אנכיות: $x=\dfrac{\pi}{2},\quad x=0,\quad x=-\dfrac{\pi}{2}$ **)**

(2) נמצא האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית (או לא זוגית ולא לא-זוגית).

$$f(-x)=\frac{2}{\sin 2(-x)}$$
$$f(-x)=\frac{2}{-\sin 2x}$$
$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

תשובה: הפונקציה אי-זוגית (משמעות - סימטרית לראשית הצירים).

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה (אין נקודות קצה):

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4\cos 2x}{(\sin 2x)^2}}$$
$$\cos 2x=0$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$
$$f(\frac{\pi}{4})=\frac{2}{\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}=2\quad\rightarrow\boxed{(\frac{\pi}{4},2)}$$

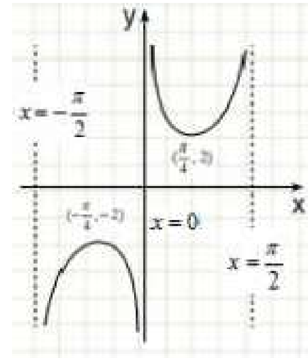
כיוון שאין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **(מונה הפונקציה חיובי),**

והנקודה החשודה כקיצון היא ברביע הראשון בין שתי אסימפטוטות אנכיות – הרי שהיא נקודת מינימום.

הפונקציה אי-זוגית – ולכן $(-\dfrac{\pi}{4},-2)$ **מקסימום.**

תשובה: $(\dfrac{\pi}{4},2)$ **מינימום,** $(-\dfrac{\pi}{4},-2)$ **מקסימום.**

(4) סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$.



ב. (1) נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$,

שהיא הזזה אנכית כלפי מטה עבור $a>0$ של $f(x)$, או כלפי מעלה עבור $a<0$.

תחומי העלייה והירידה שלה זהים לתחומי העלייה/ ירידה של $f(x)$ ($g'(x)=f'(x)$).

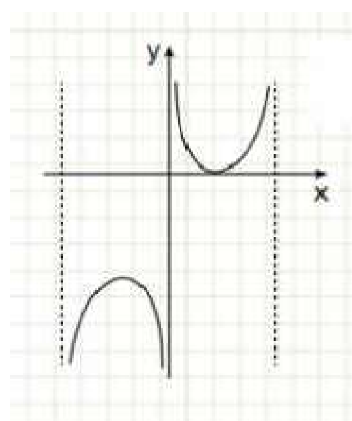
עבור $a=2$ לפונקציה $g(x)=f(x)-2$ תהייה השקה לציר ה- x בנקודה $(\frac{\pi}{4},0)$.

עבור $a=-2$ לפונקציה $g(x)=f(x)+2$ תהייה השקה לציר ה- x בנקודה $(-\frac{\pi}{4},0)$.

תשובה: למשוואה $f(x)-a=0$ יש פתרון אחד בלבד עבור $a=2$, או $a=-2$.

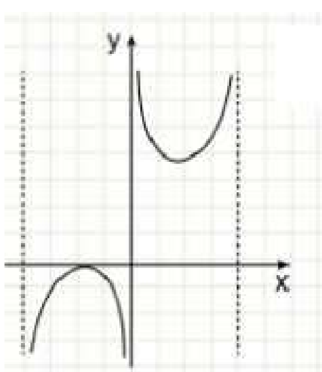
(2) עבור $a=2$ נקודות הקיצון של $g(x)$ הן:

$(\frac{\pi}{4},0)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{4},-4)$ מקסימום.



עבור $a=-2$ נקודות הקיצון של $g(x)$ הן:

$(\frac{\pi}{4},4)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{4},0)$ מקסימום.



א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

הישר $y=\frac{1}{3}x+3$ **חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה** $x=0$ **, ולכן** $f(0)=3$ **.**

נמצא את הפונקציה הקדומה, את $f(x)$ **, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית (של הביטוי בתוך השורש).**

$$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$f(x)=\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+9}+c$$

$$3=\sqrt{0+9}+c \quad \to c=0$$

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2+9}}$$

תשובה: $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ **.**

ב. (1) הביטוי x^2+9 **חיובי לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה של $f'(x)$ **ושל** $f(x)$ **הוא כל** x **.**

(2) סימן ערכי פונקציית הנגזרת נקבע בהתאם למונה .

כאשר $x>0$ **הפונקציה חיובית, וכאשר** $x<0$ **הפונקציה שלילית.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\pm 1$$

תשובה: ל- $f'(x)$ **יש שתי אסימפטוטות אופקיות:** $y=1,\quad y=-1$ **.**

(3) קל לראות שהפונקציה עוברת בראשית הצירים, וזו נקודת החיתוך היחידה שלה עם הצירים.

תשובה: $(0,0)$

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}$$

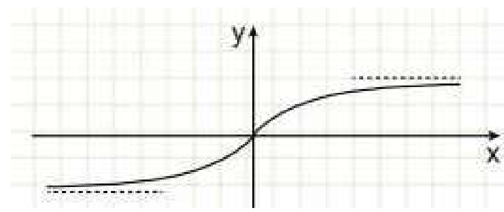
$$f''(x)=\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}}$$

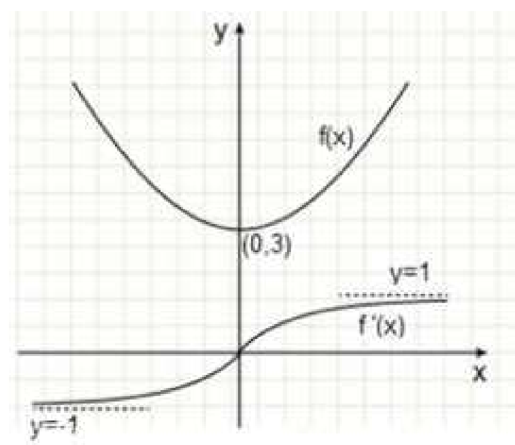
מכנה הנגזרת של $f'(x)$ חיובי לכל x, מונה הנגזרת חיובי –

תשובה: $f'(x)$ עולה לכל x , יורדת לאף x .

(5) הסקיצה המבוקשת של $f'(x)$.



(6) תוספת של $f(x)$.



ד. המשוואה $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=k$ .I **שקולה למשוואה** $f'(x)=k$ **. המשוואה** $\sqrt{x^2+9}=k$ .II **שקולה למשוואה** $f(x)=k$ **.**

עבור $k>0$ **- ניתן לראות על פי הציור המשותף בסעיף ב(6) ,**

כי לישר $y=k$ **אין נקודת חיתוך עם אף אחת מהפונקציות, בתחום** $1\le k<3$.

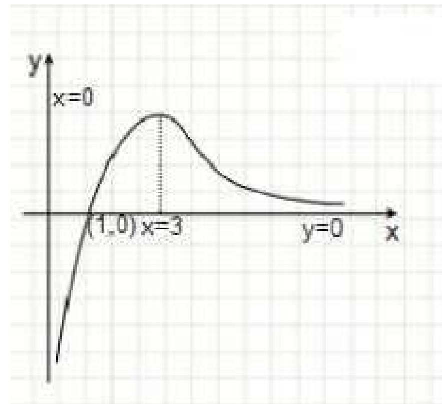
תשובה: עבור $1\le k<3$ **אין פתרון למשוואה** I **וגם אין פתרון למשוואה** II **.**

א. $f'(x)$ **, המוגדרת בתחום** $x>0$ **, חותכת את ציר ה-** x **בנקודה** $(1,0)$**.**

הנקודה, שבה $x=3$ **היא נקודת מקסימום שלה, על פי תחומי העלייה והירידה הנתונים.**

ל- $f'(x)$ **יש שתי אסימפטוטות נתונות, ציר ה-** y **וציר ה-** x**.**

סקיצה מתאימה ל- $f'(x)$ **היא:**



ב. על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ **: חיובית עבור** $x>1$ **ושלילית עבור** $0<x<1$**,**

ניתן לקבוע את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ **: עולה עבור** $x>1$ **ויורדת עבור** $0<x<1$**.**

תשובה: $x=1$ **מינימום.**

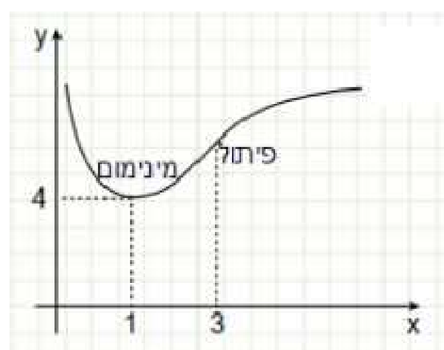
ג. על פי תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$ **: עולה עבור** $0<x<3$ **ויורדת עבור** $x>3$**,**

ניתן לקבוע את תחומי הקעירות של $f(x)$ **:**

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ **עבור** $0<x<3$ **, קעירות כלפי מטה** $\cap$ **עבור** $x>3$**.**

ד. $f(x)\geq 4$ **בתחום ההגדרה שלה** $x>0$**, לכן שיעורי נקודת המינימום הם** $(1,4)$**.**

סקיצה מתאימה ל- $f(x)$ **היא:**



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-\left[f(x)\right]^3$**.**

בהתאם: $g'(x)=-3\left[f(x)\right]^2\cdot f'(x)$

על פי הסקיצה של $f(x)$ **ניתן לראות כי** $f(x)>0$ **, לכן סימני** $g'(x)$ **נגדיים לאלו של** $f(x)$**.**

תשובה: $g(x)$ **יורדת עבור** $x>1$ **ועולה עבור** $0<x<1$**.**